



Analytical method is developed and calculations of temperature and thermostressed state at hardening of continuously-casted slab slugs at high-level cooling are carried out on the basis of the equivalent sources method.

Ю. С. ПОСТОЛЬНИК, Днепродзержинский государственный технический университет,
В. И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ, И. А. ТРУСОВА, П. Э. РАТНИКОВ, БНТУ

УДК 669.18-412:536.24

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЗАТВЕРДЕВАЮЩЕМ НЕПРЕРЫВНОЛИТОМ СЛИТКЕ ПРИ УПРАВЛЯЕМОМ ОХЛАЖДЕНИИ

Одной из важнейших особенностей затвердевающего слитка является существенная неравномерность распределения температуры по толщине твердой корки. Эта неоднородность температурного поля порождает значительные термические деформации и напряжения, нередко приводящие к появлению трещин в слитке еще на стадии его формирования (кристаллизационные трещины). Поэтому для предотвращения этих трещин, а значит и улучшения качества металла, тепловым процессом затвердевания слитка необходимо управлять. Это управление не может быть эффективным и теоретически обоснованным без знания зависимостей температурного и термонапряженного состояния затвердевающего слитка от теплофизических и механических характеристик материала и условий теплообмена с внешней средой.

Эти зависимости можно установить только путем математического моделирования (ММ) термомеханических процессов, протекающих в твердеющем слитке. Вместе с тем, следует отметить, что достоверность результатов при расчете термических напряжений во многом определяется выбором математической модели.

Как известно [1,2], изучением зависимостей между деформациями и напряжениями в различных средах занимается наука, носящая собирательное название «реология».

Реологическое поведение материала описывается соответствующими уравнениями, в которых в качестве переменных выступают деформации и напряжения, а связующими константами – предполагаемые известными модули или коэффициенты (механические характеристики) материала.

Реология исходит из трех основополагающих идеальных тел:

тело Гука (H) – упругое:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \tau = G\gamma, \quad E = 2G(1 + \nu); \quad (1)$$

тело Ньютона (N) – вязкое:

$$\sigma = \lambda \dot{\varepsilon}, \quad \tau = \eta \dot{\gamma}, \quad \lambda = 2\eta(1 + \nu); \quad (2)$$

тело Сен-Венана (S) – пластичное:

$$\sigma = \sigma_p, \quad \tau = \tau_p, \quad \sigma_p = 2\tau_p \quad (3)$$

где E , G – модули упругости 1-го и 2-го рода; ν – коэффициент Пуассона; λ , η – коэффициенты динамической вязкости при растяжении и сдвиге; σ_p , τ_p – пределы текучести при растяжении и сдвиге.

При построении механических моделей сложных (реальных) тел используются различные комбинации тех или иных моделей идеальных тел.

При параллельном соединении элементов тел Гука (H) и Ньютона (N) получаем тело Кельвина (K):

$$\sigma = E\varepsilon + \lambda \dot{\varepsilon}, \quad \tau = G\gamma + \eta \dot{\gamma}. \quad (4)$$

Если элементы Гука (H) и Ньютона (N) соединить последовательно, то получим тело Максвелла (M):

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau}{\eta}. \quad (5)$$

Существуют и другие более сложные реологические модели реальных тел. Этот подход наблюдается и в моделировании процесса формирования слитка (отливки).

При решении практических задач термомеханики затвердевающего металла нашли применение и упругая [3, 4], и упруговязкая [5, 6], и упругопластическая [7] модели.

Рассмотрим термонапряженное состояние затвердевающего слитка с позиции упругой модели. Как известно [8, 9], в квазистатической теории термоупругости основное разрешающее уравнение в перемещениях имеет вид

$$\Delta U + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div} U = 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_{\tau} \text{grad} \bar{T} - \frac{F}{G}, \quad (6)$$

где $U(x, y, z)$ – вектор перемещений, м; $\bar{T}(x, y, z, t)$ – избыточная температура (превышение над начальной), К; $F(x, y, z)$ – вектор удельных объемных сил, Н/м³; α_{τ} – коэффициент линейного температурного расширения, 1/К; ν – коэффициент Пуассона; G – модуль сдвига, МПа; Δ – оператор Лапласа.

В теории термоупругости тел неизменной геометрии при отсутствии внешних сил объемными силами обычно пренебрегают. Однако при формировании тела за счет присоединительных процессов, сопровождаемых фазовыми превращениями типа затвердевания, объемные силы имеют место и играют, как отмечается в работе [3], принудительную роль, которая заключается в следующем.

При кристаллизации размеры слоя жидкого металла, непосредственно примыкающего к затвердевшей оболочке, свободно принимают ее размеры, не претерпевая никаких деформаций, следовательно, отсутствуют и упругие напряжения. Между тем пренебрежение объемными силами в уравнении (6) приводит к решению с отличными от нуля напряжениями на фронте затвердевания.

В работе [3] показано, что учет объемных сил $F(x, y, z)$ позволяет устранить эту несогласованность физической и математической моделей термомеханики затвердевания.

Если использовать известный в теории термоупругости [8, 9] термоупругий потенциал перемещений

$$U(x, y, z, t) = \text{grad} \Phi \quad (7)$$

и ввести, следуя работе [3], функцию $f(x, y, z)$, пропорциональную потенциалу объемных сил

$$F(x, y, z) = -\frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} G \alpha_{\tau} \text{grad} f, \quad (8)$$

то уравнение (6) преобразуется к виду

$$\text{grad}(\Delta \Phi) = \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_{\tau} \text{grad}(\bar{T} + f). \quad (9)$$

Интегрируя уравнение (9) по координатам, получаем

$$\Delta \Phi = \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_{\tau} [\bar{T}(x, y, z, t) + f(x, y, z) + D(t)], \quad (10)$$

где $D(t)$ – функция интегрирования, зависящая лишь от времени t .

Зная термоупругий потенциал перемещений $\Phi(x, y, z, t)$, напряжения находим по обобщенному закону Гука в рамках постулатов Дюамеля–Неймана

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial i \partial j} - \Delta \Phi \delta_{ij} \right), \quad (11)$$

где $i, j = x, y, z$; δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

Раскрывая выражение (11), имеем

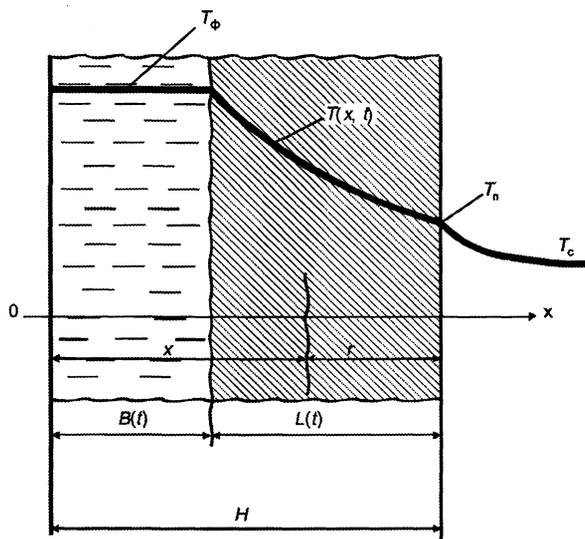


Рис. 1. Схема одностороннего затвердевания пластины

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \Delta \Phi \right), & \tau_{xy} &= \tau_{yx} = 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_y &= 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \Delta \Phi \right), & \tau_{yz} &= \tau_{zy} = 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z}, \\ \sigma_z &= 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \Delta \Phi \right), & \tau_{zx} &= \tau_{xz} = 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

В качестве граничных условий наиболее рационально задаться перемещениями наружной поверхности слитка

$$U_i|_{\Pi} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big|_{\Pi} = g(x_j, t), \quad (13)$$

а на фронте затвердевания положить

$$\sigma_{ij}|_{\Phi} = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим случай одностороннего затвердевания пластины толщиной H при одностороннем затвердевании (рис. 1).

В этом случае температура $T(x, t)$, а также термоупругий потенциал перемещений $\Phi(x, t)$ зависят лишь от одной пространственной координаты x . В таком случае все касательные τ_{ij} и нормальные σ_x отсутствуют, а

$$\sigma_y = \sigma_z = \sigma(x, t) = -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (15)$$

или, учитывая (10) и связь между упругими постоянными E, G, ν из (2),

$$\sigma(x, t) = -\frac{\alpha_T E}{1-\nu} [\bar{T} + f + D(t)]. \quad (16)$$

Для упрощения дальнейших выкладок перейдем к безразмерным величинам

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi, \tau) &= \Phi(\xi, \tau)/K_\varphi, & \bar{\sigma}(\xi, \tau) &= \sigma(\xi, \tau)/K_\sigma, \\ K_\varphi &= \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T (T_\phi - T_c) H^2, & K_\sigma &= \frac{\alpha_T}{1-\nu} (T_\phi - T_c), \\ \bar{\theta}(\xi, \tau) &= \frac{T_\phi - T(\xi, \tau)}{T_\phi - T_c}, & \psi(\xi) &= -\frac{f(\xi)}{T_\phi - T_c}, & g(\tau) &= -\frac{D(\tau)}{T_\phi - T_c}, \\ \xi &= \frac{x}{H}, & \beta(\tau) &= \frac{B(\tau)}{H}, & l(\tau) &= \frac{L(\tau)}{H} = 1 - \beta(\tau). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Тогда выражения (10) и (16) принимают вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = -[\bar{\theta}(\xi, \tau) + \psi(\xi) + g(\tau)], \quad (18)$$

$$\bar{\sigma}(\xi, \tau) = \bar{\theta}(\xi, \tau) + \psi(\xi) + g(\tau). \quad (19)$$

К уравнению (18) необходимо присоединить граничные условия (13), (14)

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0, \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right|_{\xi=\beta(\tau)} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=\beta(\tau)} = 0. \quad (21)$$

Условие (20) отражает отсутствие перемещений на наружной поверхности слитка. Такое предположение принимается в работе [3]. На наш взгляд, это может иметь место до образования зазора между слитком и кристаллизатором или при горизонтальном положении плиты, формирующейся путем «намо-раживания» расплава сверху.

Интегрируя уравнение (18), имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = - \int_{\beta(\tau)}^{\xi} [\bar{\theta}(\xi, \tau) + \psi(\xi)] d\xi - g(\tau)[\xi - \beta(\tau)]. \quad (22)$$

Из выражения (18) видно, что для удовлетворения второго граничного условия (21) должно выполняться равенство

$$g(\tau) = -\psi(\beta). \quad (23)$$

Условие (20) с учетом (21), (22) приводит к выражению

$$\int_{\beta(\tau)}^1 [\psi(\xi) - \psi(\beta)] d\xi = \int_{\beta(\tau)}^1 \bar{\theta}(\xi, \tau) d\xi. \quad (24)$$

Применяя правило Лейбница, дифференцируем интегралы (24) по параметру $\beta(\tau)$. В конечном итоге получаем

$$[1 - \beta(\tau)] \frac{d\psi(\beta)}{d\beta} = \int_{\beta(\tau)}^1 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \beta} d\xi, \quad (25)$$

откуда следует

$$\psi(\beta) = \int_1^{\beta(\tau)} \frac{d\beta}{1 - \beta(\tau)} \int_{\beta(\tau)}^1 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \beta} d\xi + \psi(1). \quad (26)$$

Так как функция $\psi(\xi)$ зависит только от одной координаты ξ , то, очевидно, выражение (26) можно представить следующим образом:

$$\psi(\beta) = \int_1^{\xi} \frac{d\beta}{1 - \beta(\tau)} \int_{\beta(\tau)}^1 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \beta} d\xi + \psi(1). \quad (27)$$

Тогда с учетом (19), (23), (25), (26) имеем

$$\bar{\sigma}(\xi, \tau) = \bar{\theta}(\xi, \tau) + \psi(\xi) + g(\tau) = \bar{\theta}(\xi, \tau) + \int_1^{\xi} \frac{d\beta}{1 - \beta(\tau)} \int_{\beta(\tau)}^1 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \beta} d\xi. \quad (28)$$

Таким образом, задача термомеханики затвердевания плоского слитка решена в общем виде.

Выражение (28) показывает, что для исследования и расчета термонапряженного состояния затвердевающего плоского слитка (или отливки) необходимо знать температурное состояние затвердевшего слоя металла. Для этого требуется решить соответствующую краевую задачу теплопроводности (КЗТ). При постановке таких задач существуют два подхода.

Фактически процессы фазовых превращений типа плавление–затвердевание в большинстве металлов и сплавов протекают в жидкотвердом (или твердожидком) слое, температурное поле которого ограничено температурами ликвидуса $T_{лик}$ и солидуса $T_{сол}$ ($T_{сол} \leq T \leq T_{лик}$). В таком случае при математическом моделировании теплового процесса фазовых превращений требуется решать систему двух КЗТ (для твердого и твердожидкого слоев) с сопряжением температурных полей на границе раздела.

В другой постановке предполагается мгновенный (скачкообразный) переход металла из жидкого в твердое состояние (при затвердевании). Такой подход сводит математическую модель к одному дифференциальному уравнению теплопроводности. Однако выделение (или поглощение) скрытой теплоты фазовых превращений на фронте (линии или в точке) нарушает сопряженность температурных полей твердой и жидкой фаз по производным (по тепловому потоку). Это делает КЗТ нелинейной.

Задачи в такой постановке общепринято относить к так называемой «проблеме Стефана» [10], хотя впервые подобная задача была рассмотрена еще за 60 лет до австрийца Ж. Стефана [11] членами Российской Академии профессорами Г. Ляме и Б. Клапейроном [12].

За редким исключением (например, [11]) задачи типа Стефана точных решений не имеют. Поэтому используются различные приближенные (численные, аналоговые, аналитические) методы. Все они находят применение в исследовании температурного состояния затвердевающего (или плавящегося) металла.

Однако для изучения его термонапряженного состояния предпочтение, на наш взгляд, следует отдавать аналитическим методам, так как использование численного решения КЗТ для определения температурных напряжений крайне затруднено.

Из приближенных аналитических методов исследования теплового процесса затвердевания наиболее известны методы Адамса [13], Любова [14], Вейника [15], Гольдфарба [16], Иванцова [17], Лейбензона [18], Самойловича [5, 19]. Нашел должное применение и метод эквивалентных источников (МЭИ) Постольника [20–25].

Так, А.И. Вейник [15], принимая теплофизические характеристики (ТФХ) металла постоянными и пренебрегая перегревом расплава ($T_0 = T_\phi$), процесс симметричного затвердевания плоской отливки толщиной $2H$ при конвективном охлаждении моделирует следующую КЗТ в стефановской постановке:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad 0 \leq \rho \leq \ell(\tau), \quad \theta(\rho, 0) = \theta_0 = 1, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} &= Bi \theta_\pi(\tau), \quad \theta(\rho, \tau) \Big|_{\rho=\ell(\tau)} = 1, \\ Ko \frac{d\ell}{d\tau} &= \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\ell(\tau)}, \quad \ell(0) = 0, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_\phi, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где введены известные [26] критерии Био (Bi), Коссовича (Ko), число Фурье ($\tau = Fo$):

$$Bi = \frac{\alpha_k H}{\lambda}; \quad Ko = \frac{q_\phi}{c(T_\phi - T_c)}; \quad \tau = Fo = \frac{at}{H^2}, \quad (30)$$

а также безразмерные температура и отсчитываемая от внешней поверхности координата

$$\theta(\rho, \tau) = \frac{T(\rho, \tau) - T_c}{T_\phi - T_c}, \quad \rho = \frac{r}{H}, \quad \ell(\tau) = \frac{L(\tau)}{H}. \quad (31)$$

В работе [26] приводится точное решение Стефана частного случая ($Bi \rightarrow \infty$) задачи (29):

$$\theta(\rho, \tau) = \frac{\operatorname{erf} \bar{v}}{\operatorname{erf} v}, \quad v(\rho, \tau) = \frac{\rho}{2\sqrt{\tau}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-\eta^2} d\eta. \quad (32)$$

При этом процесс наращивания толщины $\ell(\tau)$ затвердевшего слоя удовлетворяет хорошо известному «закону квадратного корня»

$$\ell(\tau) = k\sqrt{\tau}, \quad (33)$$

где параметр k определяется решением трансцендентного уравнения

$$\exp\left(-\frac{k^2}{4}\right) = \text{Ko} \frac{\sqrt{\pi}}{2} k \operatorname{erf}\left(\frac{k}{2}\right).$$

Если ограничиться главными членами степенных рядов функций $\exp\left(-\frac{k^2}{4}\right)$ и $\operatorname{erf}\left(\frac{k}{2}\right)$, то в первом приближении находим ([5, т. 2])

$$k_1 = \sqrt{2/\text{Ko}}. \quad (34)$$

Исследования показали [5], что упрощенная формула (34) существенно искажает действительную скорость продвижения фронта кристаллизации. Для практических целей в формулу (34) вводятся различные коррективы, о чем подробно говорится в работе [5, т. 2].

Применяя МЭИ, получено [17] приближенное аналитическое решение задачи (29) ($\text{Bi} \rightarrow \infty$) в виде

$$\theta(\rho, \tau) = 2 \left(1 - \frac{\text{Ko}k^2}{4} \right) \frac{\rho}{\ell(\tau)} - \left(1 - \frac{\text{Ko}k^2}{2} \right) \frac{\rho^2}{\ell^2(\tau)}, \quad (35)$$

где параметр k фронта затвердевания $\ell(\tau)$ (33) определяется формулой

$$u_0^2 = k^2/4 = \left\{ (\text{Ko} + 1/6) \left[1 + \sqrt{1 + \frac{12\text{Ko}}{(1 + 6\text{Ko})^2}} \right] \right\}^{-1}. \quad (36)$$

К этой задаче применялись многие аналитические методы [13–19] (рис. 2).

Задача (29) при $\text{Bi} < \infty$ получила приближенное решение при помощи МЭИ в работе [23]:

$$\theta(\rho, \tau) = 1 - \frac{\text{Bi}\ell(\tau)}{2 + \text{Bi}\ell(\tau)} \left[1 - \frac{\rho}{\ell(\tau)} \right]^2 - \text{Ko}\ell(\tau)\dot{\ell}(\tau) \frac{1 + \text{Bi}\ell(\tau)}{2 + \text{Bi}\ell(\tau)} \left[\frac{1 + \text{Bi}\rho}{1 + \text{Bi}\ell(\tau)} - \frac{\rho^2}{\ell^2(\tau)} \right], \quad (37)$$

где положение фронта кристаллизации $\ell(\tau)$ определяется выражением:

$$\ell(\tau) = \sqrt{\delta^2 + k^2\tau} - \delta, \quad \delta = 1/\text{Bi}, \quad k = \sqrt{2/\text{Ko}}. \quad (38)$$

При высокоинтенсивном охлаждении внешней поверхности плиты ($\text{Bi} \rightarrow \infty$) из (38) вытекает формула «закона квадратного корня» (33), (34). В случае же малоинтенсивного отвода теплоты ($\text{Bi} \ll 1$) из выражения (38) следует линейная функция

$$\ell(\tau) = \omega\tau, \quad \omega = k^2/(2\delta) = \text{Bi}/\text{Ko}. \quad (39)$$

На различие законов затвердевания в зависимости от интенсивности охлаждения обращается внимание в работе [3], где также показывается, что при решении задачи термоупругости затвердевающей плиты ее напряженное состояние существенно зависит от закона затвердевания (38).

Так как при переходе к безразмерным величинам (17) в задачах термоупругости (15) и (31) в задаче теплопроводности (29) используются различные обозначения координат и функций температуры, то прежде всего приведем в соответствие решения (28) и (35).

Очевидно, что

$$\bar{\theta}(\xi, \tau) = 1 - \theta(\rho, \tau), \quad \xi = 1 - \rho, \quad \beta(\tau) = 1 - \ell(\tau). \quad (40)$$

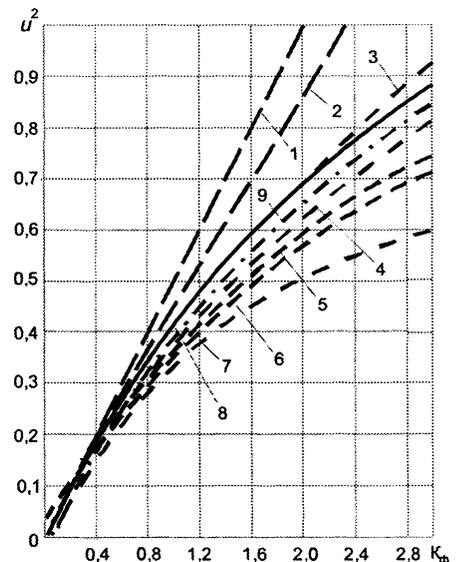


Рис. 2. Зависимость параметра $u_0^2 = k^2/4$ от критерия затвердевания $K_\phi = 1/\text{Ko}$ для пластины при $\text{Bi} \rightarrow \infty$ [16, 22]: 1 – 1-е приближение [13, 14]; 2 – 1-е приближение [16]; 3 – 2-е приближение [13]; 4 – 2-е приближение [14]; 5 – формула Иванцова [17]; 6 – 2-е приближение [16]; 7 – формула Вейника [15]; 8 – МЭИ (36) [22]; 9 – точное решение

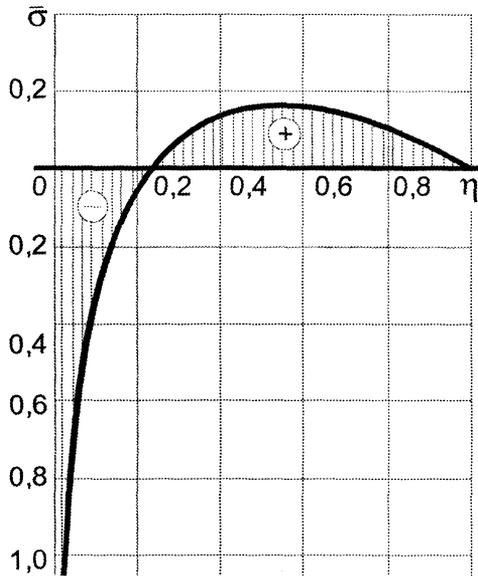


Рис. 3. Распределение напряжений по толщине затвердевшего слоя плиты при $\ell(\tau) = \sqrt{2\tau}$; $Ko = 1$

В таком случае выражение (28) принимает вид

$$\bar{\sigma}(\rho, \tau) = 1 - \theta(\rho, \tau) + \int_{\rho}^{\ell(\tau)} \frac{d\ell}{\ell(\tau)} \int_0^{\ell(\tau)} \frac{\partial \theta}{\partial \ell} d\rho. \quad (41)$$

Подставляя в (41) функцию (35), (36), получаем

$$\bar{\sigma}(\rho, \tau) = 1 - 2 \left(1 - Ko u^2\right) \frac{\rho}{\ell(\tau)} + \left(1 - 2Ko u^2\right) \frac{\rho^2}{\ell^2(\tau)} + \frac{1 + Ko u^2}{3} \ln \frac{\rho}{\ell(\tau)}. \quad (42)$$

На рис. 3 представлен график поля термоупругих напряжений в плите при $Ko u^2 = 0,5$:

$$\bar{\sigma}(\rho, \tau) = 1 - \frac{\rho}{\ell(\tau)} + \ln \sqrt{\frac{\rho}{\ell(\tau)}} = 1 - \eta + \ln \sqrt{\eta},$$

где $\eta = \rho / \ell(\tau)$.

Как видим, в рассматриваемом частном случае теплообмена ($T_n = T_c$; $Bi \rightarrow \infty$) применяется термоупругая модель, которая приводит к неограниченным сжимающим напряжениям на внешней поверхности плиты.

Аналогичные результаты получены и в работе [3]. Там же исследуется и другой вариант, когда затвердевание идет по линейному закону $\ell(\tau) = \omega \tau$. Но это уже будет при $Bi \ll 1$ (39), когда температурное состояние затвердевшего слоя плиты описывается функцией (37), которую (для удобства проведения соответствующих математических операций) несколько преобразуем.

Из (40) имеем

$$\dot{\ell}(\tau) = \frac{k^2}{2\sqrt{\delta^2 + k^2\tau}} = \frac{k^2}{2[\ell(\tau) + \delta]} = \frac{k^2 Bi}{2[1 + Bi\ell(\tau)]}. \quad (43)$$

Учитывая это и вводя обозначения

$$Bi\ell(\tau) = B(\tau), \quad Bi\rho = R(\rho), \quad \overline{Ko} = Ko k^2, \quad (44)$$

функцию (37) можно представить так:

$$\theta(\rho, \tau) = \theta(R, B) = 1 - \frac{[B(\tau) - R(\tau)]^2}{[2 + B(\tau)]B(\tau)} - \frac{\overline{Ko}B(\tau)}{2[2 + B(\tau)]} \left[\frac{1 + R(\rho)}{1 + B(\tau)} - \frac{R^2(\rho)}{B^2(\tau)} \right]. \quad (45)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \ell} = Bi \frac{\partial \theta}{\partial B} = & - \frac{2Bi}{[2 + B(\tau)]B(\tau)} \left\{ [B(\tau) - R(\rho)] - \frac{1 + B(\tau)}{2 + B(\tau)} \frac{[B(\tau) - R(\rho)]^2}{B(\tau)} + \right. \\ & \left. + \frac{\overline{Ko}B(\tau)}{4[2 + B(\tau)][1 + B(\tau)]} \left[(2 - B^2(\tau)) \frac{1 + R(\rho)}{1 + B(\tau)} + 2(1 + B(\tau))^2 \frac{R^2(\rho)}{B^2(\tau)} \right] \right\}, \\ \int_0^{\ell(\tau)} \frac{\partial \theta}{\partial \ell} d\rho = & \int_0^{B(\tau)} \frac{\partial \theta}{\partial B} dB = - \frac{B(\tau)}{3[2 + B(\tau)]^2} \left\{ [4 + B(\tau)] + \right. \\ & \left. + \frac{\overline{Ko}}{4[1 + B(\tau)]^2} \left[(2 + B(\tau))^3 + 2(2 + B(\tau)) + 4(1 + B(\tau)) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\int_{\rho}^{\ell(\tau)} \frac{d\ell}{\ell(\tau)} \int_0^{\ell(\tau)} \frac{\partial \theta}{\partial \ell} d\rho = \int_{R(\rho)}^{B(\tau)} \frac{dB}{B(\tau)} \int_0^{B(\tau)} \frac{\partial \theta}{\partial B} dR = -\frac{2 + \overline{Ko}}{3} \frac{B(\tau) - R(\rho)}{[2 + B(\tau)][2 + R(\rho)]} - \frac{1 + \overline{Ko}}{3} \ln \frac{2 + B(\tau)}{2 + R(\rho)} - \frac{\overline{Ko}}{12} \left\{ \frac{B(\tau) - R(\rho)}{[1 + B(\tau)][1 + R(\rho)]} + 2 \ln \frac{[2 + B(\tau)][1 + R(\rho)]}{[1 + B(\tau)][2 + R(\rho)]} \right\}. \quad (46)$$

В таком случае выражение (42) принимает вид

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}(\rho, \tau) = & \frac{[B(\tau) - R(\rho)]^2}{[2 + B(\tau)]B(\tau)} + \frac{\overline{Ko}B(\tau)}{2[2 + B(\tau)]} \left[\frac{1 + R(\rho)}{1 + B(\tau)} - \frac{R^2(\rho)}{B^2(\tau)} \right] - \\ & - \frac{2 + \overline{Ko}}{3} \frac{B(\tau) - R(\rho)}{[2 + B(\tau)][2 + R(\rho)]} - \frac{1 + \overline{Ko}}{3} \ln \frac{2 + B(\tau)}{2 + R(\rho)} - \\ & - \frac{\overline{Ko}}{12} \left\{ \frac{B(\tau) - R(\rho)}{[1 + B(\tau)][1 + R(\rho)]} + 2 \ln \frac{[2 + B(\tau)][1 + R(\rho)]}{[1 + B(\tau)][2 + R(\rho)]} \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

При $R(\rho) = B(\tau)$, ($\rho = \ell(\tau)$) $\overline{\sigma}(\ell, \tau) = 0$, что соответствует предположению об отсутствии напряжений на фронте затвердевания.

При $R(\rho) = 0$ ($\rho = 0$)

$$\overline{\sigma}(\theta, \tau) = \overline{\sigma}_n(\tau) = \frac{2B(\tau)}{3[2 + B(\tau)]} + \frac{\overline{Ko}}{12} \frac{[2 - 3B(\tau)]B(\tau)}{[2 + B(\tau)][1 + B(\tau)]} - \frac{2 + 3\overline{Ko}}{6} \ln \left[1 + \frac{B(\tau)}{2} \right] + \frac{\overline{Ko}}{6} \ln [1 + B(\tau)]. \quad (48)$$

В начальный момент $\tau = 0$, $\ell(0) = 0$, $B(0) = 0$ напряжения отсутствуют, что и должно быть, так как поверхность расплава начинает твердеть с естественного состояния.

При большой интенсивности теплоотвода, когда $Bi \gg 1$, $Bi \ell(\tau) \gg 1$, выражение (48) приобретает вид

$$\overline{\sigma}_n|_{Bi(\tau) \gg 1} = \frac{2 + \ln 2}{3} + \frac{2 \ln 2 - 1}{4} \overline{Ko} - \frac{1 + \overline{Ko}}{3} \ln B(\tau), \quad (49)$$

а при $Bi \rightarrow \infty$ $\overline{\sigma}_n \rightarrow -\infty$. Это соответствует предыдущему рассмотренному случаю, когда наращивание твердой корки протекает по «закону квадратного корня» (33) или (38) при $\delta = 0$.

В случае же малых Bi ($Bi \ell \ll 1$) нарастание толщины твердой фазы пропорционально времени ($\ell(\tau) = \omega \tau$), что дает формулу для напряжений

$$\overline{\sigma}_n|_{Bi(\tau) \ll 1} = \frac{4 + \overline{Ko}}{12} Bi \ell(\tau) \geq 0. \quad (50)$$

Таким образом, этот случай охлаждения затвердевающей отливки приводит к растягивающим напряжениям на внешней поверхности. Это совпадает с результатами работы [3].

Исследуем напряженное состояние затвердевающей пластины при следующих данных:

$$Bi = 1, Ko = 0,5, k^2 = 4, \overline{Ko} = K_0 k^2 = 2, \omega = 2.$$

Для этого случая функция (47) принимает вид

$$\overline{\sigma}(\rho, \tau) = \frac{[\ell(\tau) - \rho]^2}{[2 + \ell(\tau)]\ell(\tau)} + \frac{(1 + \rho)\ell^2(\tau) - [1 + \ell(\tau)]\rho^2}{[2 + \ell(\tau)][1 + \ell(\tau)]\ell(\tau)} - \frac{\ell(\tau) - \rho}{6[1 + \ell(\tau)][2 + \ell(\tau)]} \times$$

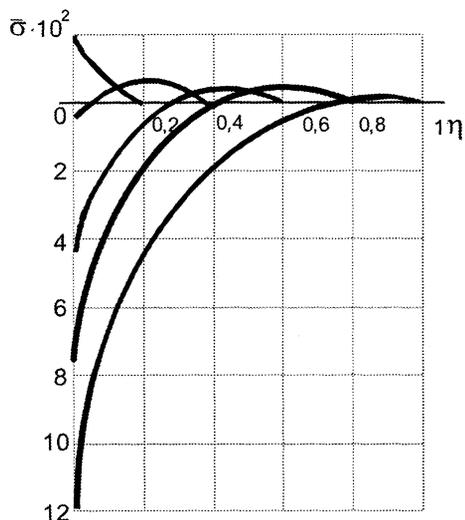


Рис. 4. Распределение напряжений по толщине $\ell(\tau)$ затвердевшей корки

$$\times \left\{ \frac{8[1+\ell(\tau)]}{2+\rho} + \frac{2+\ell(\tau)}{1+\rho} \right\} + \frac{1}{3} \ln \frac{1+\ell(\tau)}{1+\rho} - \frac{4}{3} \ln \frac{2+\ell(\tau)}{2+\rho}. \quad (51)$$

Результаты расчетов напряжений при $\rho = \ell(\tau)/2$ и $\rho = \ell(\tau)$ приведены на рис. 4.

Как видим, графики подобны рис. 3. Но здесь уже нет неограниченных напряжений при $\rho = 0$, а в начале процесса напряжения на поверхности положительные.

Выводы

Разработана аналитическая методика расчета температурно-и термонапряженного состояния затвердевающей плиты при высокоинтенсивном охлаждении. Она может найти практическое применение при расчетах режимов затвердевания слитков, разливаемых на современных машинах непрерывного литья заготовок с целью улучшения качества разливаемых изделий (например, уменьшения так называемых горячих трещин).

Литература

1. Райнер М. Реология. М.: Наука, 1995.
2. Реология: Теория и приложения / Под ред. Ф. Эйриха. М.: ИЛ, 1962.
3. Бровман М. Я., Сури́н Е. В. Расчет термических напряжений в слитке при кристаллизации // ИФЖ. 1963. Т. VI. № 5. С. 106–113.
4. Иодко Э. А. Расчет термических напряжений в оболочке затвердевающих тел // ИФЖ. 1968. Т. XIV. № 4. С. 674–682.
5. Самойлович Ю. А., Тимошпольский В. И., Трусова И. А. и др. Стальной слиток. В 3-х т. Т. 1, 2. Мн.: Мн.: Белорусская наука, 2000.
6. Самойлович Ю. А., Кабанов З. К. Учет эффекта релаксации при определении термических напряжений в отливке, затвердевающей в интервале температур // Горение, теплообмен и нагрев металла. М.: Metallurgiya, 1973. С. 100–113.
7. Пальмов В. А. О напряжениях, возникающих при затвердевании материалов // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. № 4. С. 80–85.
8. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970.
9. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963.
10. Рубинштейн Л. И. Проблема Стефана. Рига: Звайгене, 1967.
11. Stefan G. T. Uber einige Problem der Theorie der Wärme Leitung Sitzungsberichte der Wissenschaften. 1889. Vol. 98. N 3.
12. Lamé H., Clapeyron B. Ann de chimie et de physique. 1881. Vol. 47. P. 250.
13. Адамс С. М. Анализ тепловой стороны процесса затвердевания расплавов // Жидкие металлы и их затвердевание. М.: Metallurgizdat, 1962. С. 215–247.
14. Борисов В. Т., Любов Б. Я., Темкин Д. Е. О расчете кинетики затвердевания металлического слитка при различных температурных условиях на его поверхности // ДАН СССР. 1955. № 2. С. 223–226.
15. Вейник А. И. Теория затвердевания отливки. М.: Mashgiz, 1960.
16. Гольдфарб Э. М. Теплотехника металлургических процессов. М.: Metallurgiya, 1967.
17. Иванцов Г. П. Приближенный способ расчета кристаллизации слитка // Теплотехника слитка и печи. М.: Metallurgizdat, 1960. Вып. 2 (5). С. 60–104.
18. Лейбензон Л. С. Руководство по нефтепромысловой механике. Ч. 1. Гидравлика. М.; Л.: ГНТИ, 1931.
19. Самойлович Ю. А. О приближенных способах расчета затвердевания отливок // ИФЖ. 1966. Т. XI. № 5. С. 597–602.
20. Постольник Ю. С. Приближенное исследование процесса симметричного затвердевания отливок при конвективном охлаждении // Изв. вузов. Черная металлургия. 1971. № 6. С. 155–160.
21. Постольник Ю. С. Аналитический расчет температурного поля затвердевающей отливки // Изв. вузов. Машиностроение. 1973. № 1. С. 130–135.
22. Постольник Ю. С., Темкин С. И., Барабаш Н. М. Исследование процесса затвердевания плоской отливки // Изв. вузов. Машиностроение. 1976. № 5. С. 140–143.
23. Постольник Ю. С., Тимошпольский В. И., Трусова И. А., Дубина О. В. Тепловые процессы при затвердевании крупных стальных слитков // Литье и металлургия. 2000. № 1. С. 53–55.
24. Постольник Ю. С., Огурцов А. П. Нелінійна прикладна термомеханіка. Киев: НМЦ ВО МОНУ, 2000.
25. Тимошпольский В. И., Постольник Ю. С., Андрианов Д. Н. Теоретические основы теплофизики и термомеханики в металлургии. Мн.: Беларуская наука, 2005.
26. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967.