



The numerical analysis of temperature field, being cooled under analytical and numerical schematic models, is carried out. It is shown that implicit schematic model is close to analytical decision.

А. Н. ЧИЧКО, О. А. САЧЕК, А. В. БОРОЗДИН, БНТУ

УДК 669.27:519

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АНАЛИТИЧЕСКОГО И ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ТЕПЛОВОЙ ЗАДАЧИ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕЙ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

При решении тепловых задач часто используются численные методы расчета сложных промышленных объектов. Точность используемых численных схем при этом может существенно различаться. Экспериментально оценить адекватность численных схем довольно сложно, а аналитические решения тепловой задачи для объектов, имеющих сложную пространственную геометрию, отсутствуют. Однако во многих публикациях этот вопрос поднимается, когда речь идет об анализе получаемых решений, что свидетельствует об актуальности данной проблемы.

Численное моделирование распределения температуры в нагреваемом кристаллизующемся объекте — одна из актуальных научно-технических задач. Многие компьютерные системы технологических процессов построены на численных методах моделирования температуры и используют уравнение теплопроводности. Основной проблемой при моделировании распределения температур является выбор шага по пространству и времени, которые определяют точность решения тепловой задачи. Очень маленький шаг по времени и пространству существенно увеличивает временные затраты на расчет, большой — снижает точность моделирования и приводит к неустойчивости получаемых решений. Выбор и оптимизация шага в численных схемах является важной научной задачей. Чтобы проверить правильность численной схемы, необходимо сравнить результаты моделирования с аналитическими решениями. К сожалению, анализ литературных данных показывает, что аналитические решения получены в таких приближениях, которые могут вносить погрешность в моделируемый параметр в большей степени, чем это связано с численной схемой. Известно, что простые геометрические объекты, имеющие определенную симметрию, могут использоваться для поиска аналитических решений. Причем только в этом случае минимизируются различные приближения и снижается уровень допущений, в которых они получены.

В настоящей статье рассмотрена тепловая задача для охлаждаемого двумерного металлического квадрата. Аналитические решения, полученные для этого случая, сравниваются с результатами моделирования, полученными по явной и неявной численным схемам.

Цель данной работы — численное моделирование температуры двумерного охлаждаемого объекта на основе аналитической, неявной и явной численных схем.

Для оценки погрешности этих схем при моделировании на первом этапе исследования были проведены аналитические вычисления распределения температуры в охлаждаемом квадрате. В качестве модели использовали уравнение теплопроводности и систему начальных и граничных условий:

$$\Delta U = \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

$$U|_{x=\pm a} = T_1, \quad (2)$$

$$\begin{cases} U|_{y=\pm b} = T_1, \\ U|_{t=0} = T, \end{cases} \quad (3)$$

где $a = \lambda_1 / (c\rho)$ — коэффициент температуропроводности материала; λ_1 — теплопроводность; c — теплоемкость; ρ — плотность.

В прямоугольнике $G = \{-a < x < a, -b < y < b\}$ для промежутка времени $0 \leq t \leq t_1$.

Для нахождения решения уравнения (1) обозначим $U(x, y, t) = T_1 + U_1(x, y, t)$. После этого решение задачи (1)–(2), согласно методу Фурье [1], запишем в виде

$$U_1(x, y, z, t) = U(x, y, z)T(t). \quad (4)$$

После подстановки выражения (4) в (1) получим

$$\frac{\Delta U_1}{U_1} = \frac{1}{a} \frac{T'}{T} = -\lambda,$$

где λ — постоянная;

$$\Delta U_1 + \lambda U_1 = 0 \text{ или } T(t) = ce^{-\lambda at}. \quad (5)$$

Если U_{km} — собственные функции, а λ_{km} — собственные значения уравнения (5), то решение задачи (1)–(2) принимает вид

$$U_1(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} T_{km}(t) U_{km}(x, y). \quad (6)$$

Предположим, что температура в объекте подчиняется закону косинуса и может быть представлена в виде произведения двух функций, тогда в качестве U_{km} выбираются функции:

$$U_{km} = \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2b},$$

а функция $T_{km}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{a} T'_{km}(t) = -\lambda_{km},$$

$$\text{где } \lambda_{km} = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{(2m+1)\pi}{2b} \right)^2.$$

Найдем эту функцию:

$$T_{km} = \alpha_{km} e^{-\lambda_{km} at}.$$

Коэффициенты α_{km} определяем из начальных условий. Подставляя (4), (6) в (3), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{km} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2b} = T_0 - T_1. \quad (7)$$

Умножая (7) на значения $\cos \frac{(2i+1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2j+1)\pi y}{2b}$ после интегрирования по x, y от $[-a; a], [-b; b]$ соответственно, получаем

$$ab\alpha_{ij} = (T_0 - T_1) \frac{4a(-1)^{i+1}}{\pi(2i+1)} \frac{4b(-1)^{j+1}}{\pi(2j+1)},$$

следовательно,

$$\alpha_{ij} = \frac{16(T_0 - T_1)(-1)^{i+1}(-1)^{j+1}}{\pi^2(2i+1)(2j+1)}.$$

Таким образом, для вычисления распределения температуры предлагается следующая аналитическая формула:

$$U = T_1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} T_{km}(t) U_{km}(x, y).$$

$$\text{Здесь } U_{km} = \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2b}; \quad T_{km} = \alpha_{km} e^{-\lambda_{km} at}; \quad \lambda_{km} = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{(2m+1)\pi}{2b} \right)^2;$$

$$\alpha_{km} = \frac{16(T_0 - T_1)(-1)^{k+1}(-1)^{m+1}}{\pi^2(2k+1)(2m+1)}.$$

Общая формула имеет вид

$$U(x, y, t) = T_1 + \frac{16(T_0 - T_1)}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(-1)^{m+1}}{(2k+1)(2m+1)} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2b} e^{-\frac{((2k+1)^2 + (2m+1)^2)\pi^2 at}{4ab}}$$

На втором этапе уравнение теплопроводности вида (1)–(2) было расписано в явной конечно-разностной аппроксимации [2, 3].

Для построения разностной схемы введем разностную сетку с координатами узлов (x_p, y_l, t^n) , где $x_p = p\Delta x$ ($p = 0, 1, 2, \dots, P$; $\Delta x = 2a/P$); $y_l = l\Delta y$ ($l = 0, 1, 2, \dots, L$; $\Delta y = 2b/L$); $t^n = n\tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots, t_1/\tau$). Тогда значение функции в узле (x_p, y_l, t^n) обозначим через $y_{ij}^n = U(i\Delta x, j\Delta y, n\tau)$. Тогда решение задачи (1)–(2) можно найти с помощью явной схемы:

$$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n}{\tau} = \Lambda_1 y_{ij}^n + \Lambda_2 y_{ij}^n, \quad (8)$$

$$\text{где } \Lambda_1 y_{ij} = a \frac{y_{i+1,j} - 2y_{ij} + y_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \quad \Lambda_2 y_{ij} = a \frac{y_{i,j+1} - 2y_{ij} + y_{i,j-1}}{\Delta y^2}.$$

В качестве краевых условий использовали условия (2):

$$y_{ij}^{n+1} = T_1, \quad (9)$$

где $i=0$ и $i=P$, $j=0$ и $j=L$, $n=-1, 0, 1, \dots, N-1$,

$$y_{ij}^0 = T_0,$$

где $i=1, 2, \dots, P-1, j=1, 2, \dots, L-1$.

Таким образом, решение разностной схемы (8) находим по временным слоям с помощью явной формулы:

$$y_{ij}^{n+1} = y_{ij}^n + \tau(\Lambda_1 y_{ij}^n + \Lambda_2 y_{ij}^n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, (t_1/\tau - 1).$$

На третьем этапе была предложена неявная схема уравнения теплопроводности [2, 3]:

$$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n}{\tau} = \Lambda_1 y_{ij}^{n+1} + \Lambda_2 y_{ij}^{n+1},$$

$$\text{где } \Lambda_1 y_{ij} = a \frac{y_{i+1,j} - 2y_{ij} + y_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \quad \Lambda_2 y_{ij} = a \frac{y_{i,j+1} - 2y_{ij} + y_{i,j-1}}{\Delta y^2}.$$

Краевые условия аналогичны (9).

Для поиска решения использовали схему переменных направлений (продольно-поперечная схема) [2, 4]. Наряду с основными значениями функции $u(x, y, t)$, т.е. y_{ij}^n и y_{ij}^{n+1} вводим промежуточное значение $y_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$, которое рассматриваем как значение y_{ij} при $t = t_n + \frac{1}{2}\tau = t_{n+\frac{1}{2}}$. Переход от слоя n к слою $(n+1)$ совершается в два этапа с шагами $0,5\tau$:

$$\frac{y_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - y_{ij}^n}{0,5\tau} = \Lambda_1 y_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y_{ij}^n, \quad (10)$$

$$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{0,5\tau} = \Lambda_1 y_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y_{ij}^{n+1}. \quad (11)$$

Перепишем уравнение (10) в виде [2]: $0,5\gamma_1 y_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - (1-\gamma_1) y_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + 0,5\gamma_1 y_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = -(y_{ij}^n + 0,5\tau\Lambda_2 y_{ij}^n)$,

$$\text{где } \gamma_1 = \frac{\tau a}{\Delta x^2},$$

а уравнение (11) в виде: $0,5\gamma_2 y_{i,j-1}^{n+1} - (1-\gamma_2) y_{ij}^{n+1} + 0,5\gamma_2 y_{i,j+1}^{n+1} = -(y_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + 0,5\tau\Lambda_1 y_{ij}^{n+\frac{1}{2}})$,

$$\text{где } \gamma_2 = \frac{\tau a}{\Delta y^2}.$$

Уравнения решаем методом прогонки.

По явной и неявной схемам была разработана программа, позволяющая рассчитывать температурное поле в охлаждаемом объекте. Геометрия моделируемого поля показана на рис. 1.

На рис. 2 представлено распределение температур в рассматриваемом объекте (охлаждающемся металлическом квадрате) для трех моментов времени. Температуры получены с использованием аналитической схемы с шагом дискретизации координат 0,1, значение температуры рассматривается в центре ячейки. Как видно из рисунка, распределение температуры симметрично относительно центра квадрата.

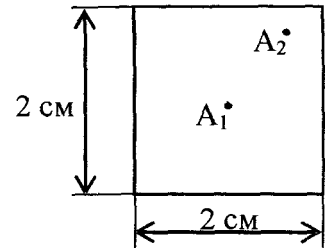


Рис. 1. Геометрия моделируемого объекта ($\lambda=0,00007$ кал/(кг·град), $c=0,14$ кал/(кг·град), $\rho=0,0072 \times 10^{-6}$ кг/м³)

0-115 116-230 231-345 346-460 461-575 576-690 691-805																				
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	50.02	81.38	109.95	134.98	155.97	172.68	185.09	193.25	197.30	197.30	193.25	185.09	172.68	155.97	134.98	109.95	81.38	50.02	0
3	0	81.38	132.40	178.88	219.60	253.75	280.94	301.12	314.41	321.00	321.00	314.41	301.12	280.94	253.75	219.60	178.88	132.40	81.38	0
4	0	109.95	178.88	241.69	296.71	342.84	379.59	406.85	424.81	433.70	433.70	424.81	406.85	379.59	342.84	296.71	241.69	178.88	109.95	0
5	0	134.98	219.60	296.71	364.24	420.68	465.99	499.45	521.59	532.42	532.42	521.59	499.45	465.99	420.68	364.24	296.71	219.60	134.98	0
6	0	155.97	253.75	342.84	420.68	483.33	528.43	577.12	602.59	615.21	615.21	602.59	577.12	528.43	483.33	420.68	342.84	253.75	155.97	0
7	0	172.68	280.94	379.59	465.99	538.45	590.15	638.97	667.17	681.14	681.14	667.17	638.97	590.15	538.45	465.99	379.59	280.94	172.68	0
8	0	185.09	301.12	406.85	499.45	577.12	638.97	684.86	715.09	730.07	730.07	715.09	684.86	638.97	577.12	499.45	406.85	301.12	185.09	0
9	0	193.25	314.41	424.81	521.59	602.59	667.17	715.09	746.66	762.29	762.29	746.66	715.09	667.17	602.59	521.59	424.81	314.41	193.25	0
10	0	197.30	321.00	433.70	532.42	615.21	681.14	730.07	762.29	778.26	778.26	762.29	730.07	681.14	615.21	532.42	433.70	321.00	197.30	0
11	0	197.30	321.00	433.70	532.42	615.21	681.14	730.07	762.29	778.26	778.26	762.29	730.07	681.14	615.21	532.42	433.70	321.00	197.30	0
12	0	193.25	314.41	424.81	521.59	602.59	667.17	715.09	746.66	762.29	762.29	746.66	715.09	667.17	602.59	521.59	424.81	314.41	193.25	0
13	0	185.09	301.12	406.85	499.45	577.12	638.97	684.86	715.09	730.07	730.07	715.09	684.86	638.97	577.12	499.45	406.85	301.12	185.09	0
14	0	172.68	280.94	379.59	465.99	538.45	590.15	638.97	667.17	681.14	681.14	667.17	638.97	590.15	538.45	465.99	379.59	280.94	172.68	0
15	0	155.97	253.75	342.84	420.68	483.33	538.45	577.12	602.59	615.21	615.21	602.59	577.12	483.33	420.68	342.84	253.75	155.97	0	0
16	0	134.98	219.60	296.71	364.24	420.68	465.99	499.45	521.59	532.42	532.42	521.59	499.45	465.99	420.68	364.24	296.71	219.60	134.98	0
17	0	109.95	178.88	241.69	296.71	342.84	379.59	406.85	424.81	433.70	433.70	424.81	406.85	379.59	342.84	296.71	241.69	178.88	109.95	0
18	0	81.38	132.40	178.88	219.60	253.75	280.94	301.12	314.41	321.00	321.00	314.41	301.12	280.94	253.75	219.60	178.88	132.40	81.38	0
19	0	50.02	81.38	109.95	134.98	155.97	172.68	185.09	193.25	197.30	197.30	193.25	185.09	172.68	155.97	134.98	109.95	81.38	50.02	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a																				
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	32.57	53.28	72.55	89.89	104.89	117.23	126.68	133.06	136.27	136.27	133.06	126.68	117.23	104.89	89.89	72.55	53.28	32.57	0
3	0	53.28	87.17	118.70	147.06	171.60	191.79	207.25	217.68	222.94	222.94	217.68	207.25	191.79	171.60	147.06	118.70	87.17	53.28	0
4	0	72.55	118.70	161.62	200.24	233.66	261.15	282.19	296.41	303.57	303.57	296.41	282.19	261.15	233.66	200.24	161.62	118.70	72.55	0
5	0	89.89	147.06	200.24	248.09	289.50	323.56	349.63	367.24	376.11	376.11	367.24	349.63	323.56	289.50	248.09	200.24	147.06	89.89	0
6	0	104.89	171.60	233.66	289.50	337.81	377.56	407.97	428.52	438.88	438.88	428.52	407.97	377.56	337.81	289.50	233.66	171.60	104.89	0
7	0	117.23	191.79	261.15	323.56	377.56	421.96	455.98	476.95	490.52	490.52	476.95	455.98	421.96	377.56	323.56	261.15	191.79	117.23	0
8	0	126.68	207.25	282.19	349.63	407.97	455.98	492.71	517.53	530.03	530.03	517.53	492.71	455.98	407.97	349.63	282.19	207.25	126.68	0
9	0	133.06	217.68	296.41	367.24	428.52	476.95	517.53	543.60	566.73	566.73	543.60	517.53	476.95	428.52	367.24	296.41	217.68	133.06	0
10	0	136.27	222.94	303.57	376.11	438.88	490.52	530.03	566.73	570.18	570.18	566.73	530.03	490.52	438.88	376.11	303.57	222.94	136.27	0
11	0	136.27	222.94	303.57	376.11	438.88	490.52	530.03	566.73	570.18	570.18	566.73	530.03	490.52	438.88	376.11	303.57	222.94	136.27	0
12	0	133.06	217.68	296.41	367.24	428.52	476.95	517.53	543.60	566.73	566.73	543.60	517.53	476.95	428.52	367.24	296.41	217.68	133.06	0
13	0	126.68	207.25	282.19	349.63	407.97	455.98	492.71	517.53	530.03	530.03	517.53	492.71	455.98	407.97	349.63	282.19	207.25	126.68	0
14	0	117.23	191.79	261.15	323.56	377.56	421.96	455.98	476.95	490.52	490.52	476.95	455.98	421.96	377.56	323.56	261.15	191.79	117.23	0
15	0	104.89	171.60	233.66	289.50	337.81	377.56	407.97	428.52	438.88	438.88	428.52	407.97	377.56	337.81	289.50	233.66	171.60	104.89	0
16	0	89.89	147.06	200.24	248.09	289.50	323.56	349.63	367.24	376.11	376.11	367.24	349.63	323.56	289.50	248.09	200.24	147.06	89.89	0
17	0	72.55	118.70	161.62	200.24	233.66	261.15	282.19	296.41	303.57	303.57	296.41	282.19	261.15	233.66	200.24	161.62	118.70	72.55	0
18	0	53.28	87.17	118.70	147.06	171.60	191.79	207.25	217.68	222.94	222.94	217.68	207.25	191.79	171.60	147.06	118.70	87.17	53.28	0
19	0	32.57	53.28	72.55	89.89	104.89	117.23	126.68	133.06	136.27	136.27	133.06	126.68	117.23	104.89	89.89	72.55	53.28	32.57	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
б																				
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	15.95	26.15	35.70	44.36	51.93	58.22	63.07	66.37	68.04	68.04	66.37	63.07	58.22	51.93	44.36	35.70	26.15	15.95	0
3	0	26.15	42.86	58.51	72.71	85.12	95.42	103.38	108.79	111.53	111.53	108.79	103.38	95.42	85.12	72.71	58.51	42.86	26.15	0
4	0	35.70	58.51	79.88	99.26	116.20	130.26	141.12	148.51	152.25	152.25	148.51	141.12	130.26	116.20	99.26	79.88	58.51	35.70	0
5	0	44.36	72.71	99.26	123.36	144.40	161.88	175.37	184.55	189.20	189.20	184.55	175.37	161.88	144.40	123.36	99.26	72.71	44.36	0
6	0	51.93	85.12	116.20	144.40	169.03	189.50	205.29	216.04	221.48	221.48	216.04	205.29	189.50	169.03	144.40	116.20	85.12	51.93	0
7	0	58.22	95.42	130.26	161.88	189.50	212.44	230.14	242.19	248.29	248.29	242.19	230.14	212.44	189.50	161.88	130.26	95.42	58.22	0
8	0	63.07	103.38	141.12	175.37	205.29	230.14	249.33	262.38	268.99	268.99	262.38	249.33	230.14	205.29	175.37	141.12	103.38	63.07	0
9	0	66.37	108.79	148.51	184.55	216.04	242.19	262.38	276.12	283.07	283.07	276.12	262.38	242.19	216.04	184.55	148.51	108.79	66.37	0
10	0	68.04	111.53	152.25	189.20	221.48	248.29	268.99	283.07	290.19	290.19	283.07	268.99	248.29	221.48	189.20	152.25	111.53	68.04	0
11	0	68.04	111.53	152.25	189.20	221.48	248.29	268.99	283.07	290.19	290.19	283.07	268.99	248.29	221.48	189.20	152.25	111.53	68.04	0
12	0	66.37	108.79	148.51	184.55	216.04	242.19	262.38	276.12	283.07	283.07	276.12	262.38	242.19	216.04	184.55	148.51	108.79	66.37	0
13	0	63.07	103.38	141.12	175.37	205.29	230.14	249.33	262.38	268.99	268.99	262.38	249.33	230.14	205.29	175.37	141.12	103.38	63.07	0
14	0	58.22	95.42	130.26	161.88	189.50	212.44	230.14	242.19	248.29	248.29	242.19	230.14	212.44						

Анализ рассчитанных распределений по температуре показал, что значения температур различаются между собой для аналитической, явной и неявной схем. Величина расхождения по температурам различна. Поэтому для анализа были введены параметры, характеризующие значения разницы между температурами, полученными с помощью аналитической и численной схем:

$$P_1 = |T_{\text{анал}} - T_{\text{я.с.}}|, \\ P_2 = |T_{\text{анал}} - T_{\text{н.с.}}|,$$

где $T_{\text{анал}}$, $T_{\text{я.с.}}$, $T_{\text{н.с.}}$ – соответственно температура, полученная с помощью аналитической, явной и неявной схем.

На рис. 3 показаны двумерные распределения параметра расчета P_1 для различных значений шага дискретизации по времени Δt . Как видно из рисунка, максимальные значения параметров P_1 локализованы в центральной части квадрата, при уменьшении шага по времени для явной схемы значения параметров уменьшаются. Было установлено также, что при уменьшении шага дискретизации по времени (Δt) в центре квадрата образуется область с меньшими значениями P_1 , т.е. с более точными значениями температуры, полученной по явной схеме.

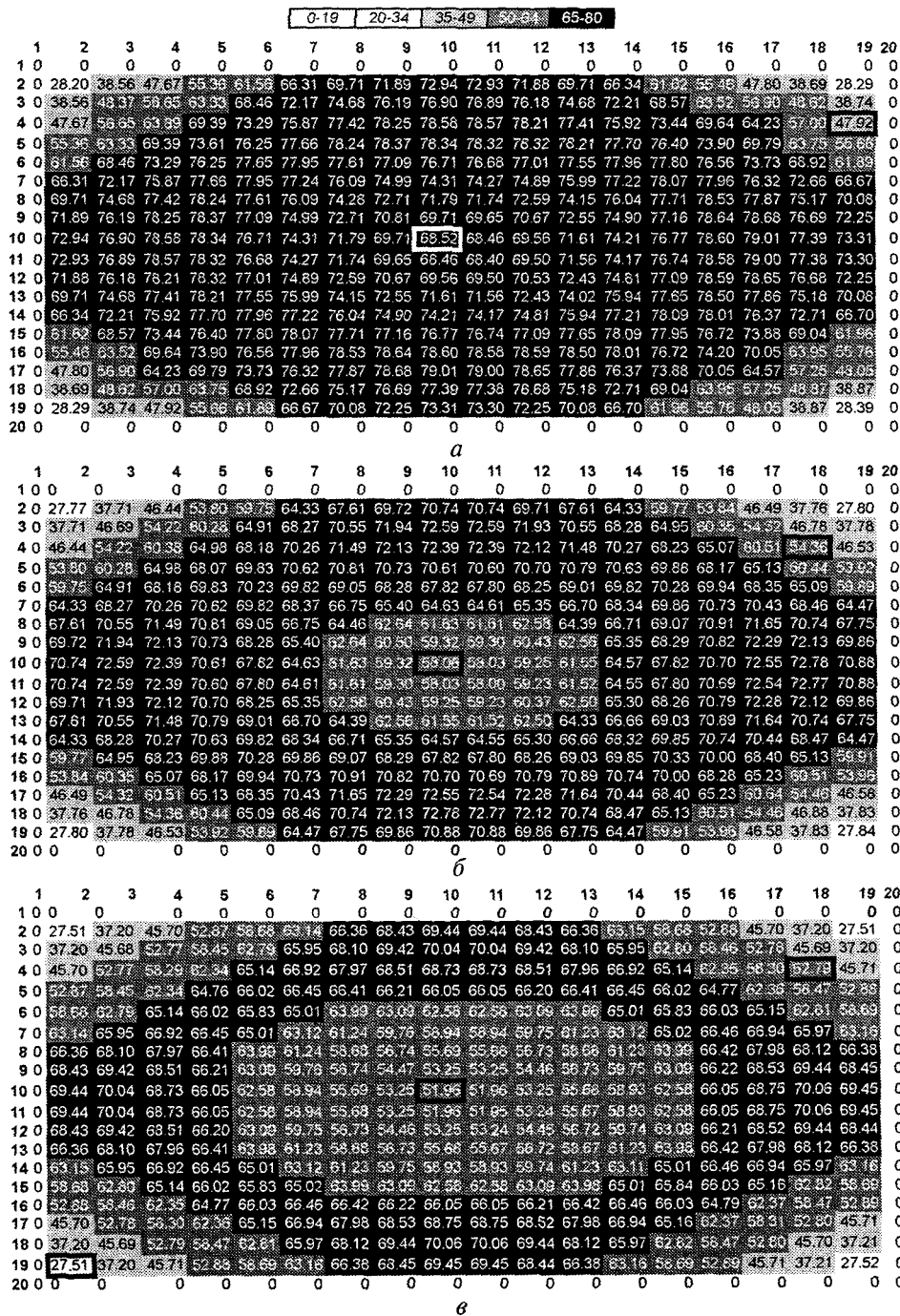


Рис. 3. Двумерное распределение параметра сходимости P_1 явной схемы при $\Delta x = \Delta y = 0,1$ для различных Δt (для сходимости $\Delta t \leq 0,0025$): а – $\Delta t = 0,0025$; б – $0,001$; в – $0,0001$

Для более достоверного анализа на следующем этапе были введены абсолютные параметры, характеризующие отклонения по температурам, рассчитанным по различным схемам, не зависящим от величины температуры. В исследовании использовали два параметра сходимости решений (погрешности) для явной и неявной схем:

$$P_3 = \left| \frac{T_{\text{анал}} - T_{\text{я.с.}}}{T_{\text{анал}}} \cdot 100\% \right|,$$

$$P_4 = \left| \frac{T_{\text{анал}} - T_{\text{н.с.}}}{T_{\text{анал}}} \cdot 100\% \right|.$$

На рис. 4, а показано значение параметров сходимости решений для явной и неявной схем для точки квадрата, находящейся в центре. Как видно из рисунка, увеличение шага по времени повышает погрешность расчетов по температуре, причем явная схема для шага по времени $\Delta t < 0,06$ приводит к существенному различию явной и неявной схем, т.е. отклонение от аналитического решения для явной и неявной схем может быть различно в зависимости от дискретности по пространству.

На рис. 4, б показаны значения параметров P_3 и P_4 для точки квадрата, находящейся вблизи угла. Как видно из рисунка, погрешность в расчетах температур изменяется подобно предыдущей зависимости. Точки квадрата, выбранные для анализа изменения температур на рис. 2, а–в, 3, а–в, 5, а–в, выделены рамкой.

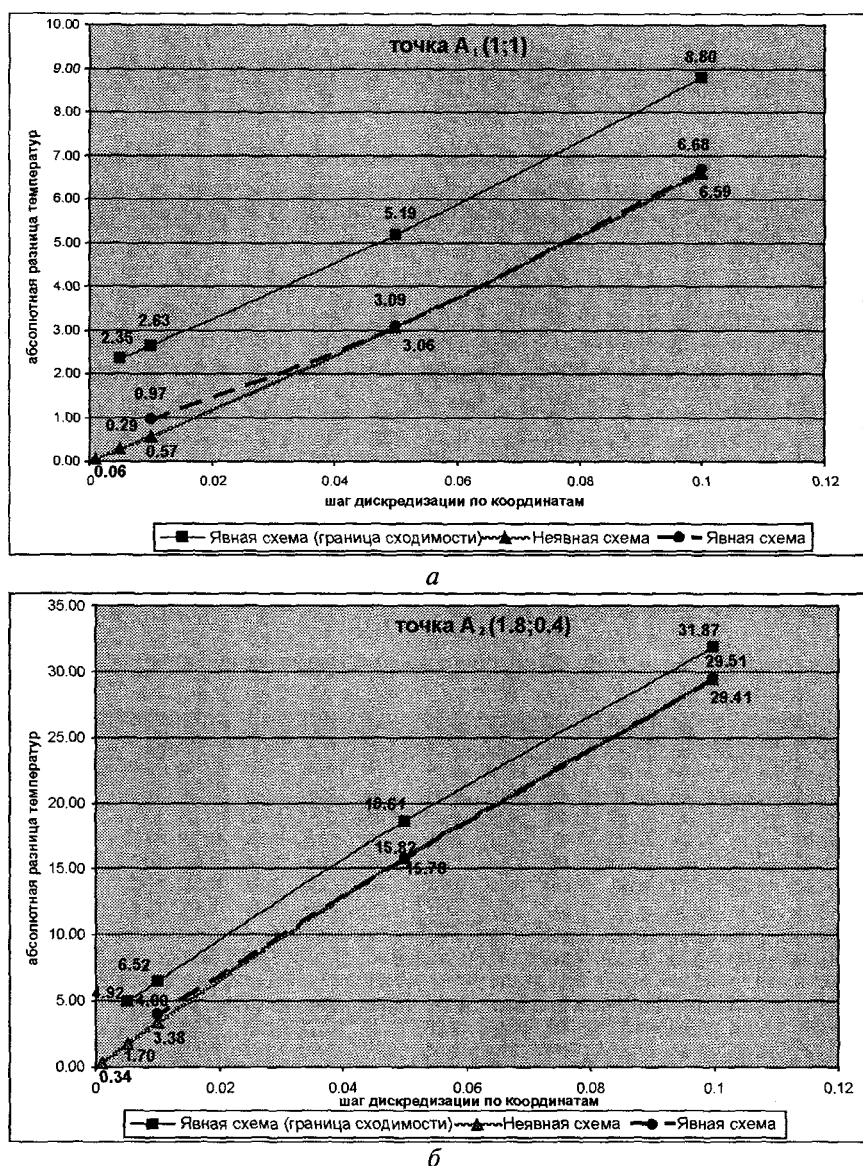


Рис. 4. Влияние шага дискретизации по координатам на параметры сходимости P_3 и P_4 для выделенных точек A_1 и A_2

На рис. 5, а–в представлено двумерное распределение погрешности расчета (параметров P_3 и P_4) для температуры для различных случаев. Как видно из рисунка, максимальные значения параметров локализованы по углам квадрата, при уменьшении шага по времени для явной схемы значения погрешностей уменьшаются и приближаются к значениям погрешностей, полученных с помощью неявной схемы, на сходимость которой шаг по времени практически не влияет. Так, максимальные значения параметров сходимости решений представлены на рис. 5, а – 56,75, на рис. 5, б – 55,01, на рис. 5, в – 54,94.

0-10 11-20 21-30 31-40 41-50 51-60

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	56.38	47.39	43.36	41.01	39.47	38.40	37.67	37.20	36.97	36.97	37.19	37.67	38.42	39.51	41.08	43.47	47.56	56.56
3	0	47.39	36.53	31.67	28.84	26.98	25.69	24.80	24.23	23.96	23.95	24.23	24.80	25.70	27.02	28.93	31.81	36.72	47.60
4	0	43.36	31.67	26.43	23.39	21.38	19.99	19.03	18.42	18.12	18.12	18.41	19.03	20.00	21.42	23.47	26.57	31.87	43.58
5	0	41.01	28.84	23.39	20.21	18.12	16.67	15.67	15.03	14.71	14.71	15.02	15.66	16.67	18.15	20.29	23.52	29.03	41.23
6	0	39.47	26.98	21.38	18.12	15.97	14.48	13.45	12.79	12.47	12.46	12.78	13.44	14.48	16.00	18.19	21.51	27.16	39.68
7	0	38.40	25.69	19.99	16.67	14.48	12.96	11.91	11.24	10.91	10.90	11.22	11.89	12.95	14.50	16.73	20.11	25.86	38.61
8	0	37.67	24.80	19.03	15.67	13.45	11.91	10.85	10.17	9.83	9.83	10.15	10.83	11.90	13.46	15.72	19.14	24.96	37.86
9	0	37.20	24.23	18.42	15.03	12.79	11.24	10.17	9.48	9.14	9.14	9.46	10.15	11.23	12.80	15.08	18.52	24.39	37.39
10	0	36.97	23.96	18.12	14.71	12.47	10.91	9.83	9.14	8.80	8.80	9.12	9.81	10.89	12.48	14.76	18.22	24.11	37.15
11	0	36.97	23.95	18.12	14.71	12.46	10.90	9.83	9.14	8.80	8.79	9.12	9.80	10.89	12.47	14.76	18.21	24.11	37.15
12	0	37.19	24.23	18.41	15.02	12.78	11.22	10.15	9.46	9.12	9.12	9.45	10.13	11.21	12.79	15.07	18.52	24.39	37.39
13	0	37.67	24.80	19.03	15.66	13.44	11.89	10.83	10.15	9.81	9.80	10.13	10.81	11.89	13.45	15.72	19.14	24.97	37.87
14	0	38.42	25.70	20.00	16.67	14.48	12.95	11.90	11.23	10.89	10.89	11.21	11.89	12.95	14.50	16.74	20.12	25.88	38.62
15	0	39.51	27.02	21.42	18.15	16.00	14.50	13.46	12.80	12.48	12.47	12.79	13.45	14.50	16.03	18.23	21.55	27.21	39.72
16	0	41.08	28.93	23.47	20.29	18.19	16.73	15.72	15.08	14.76	14.76	15.07	15.72	16.74	18.23	20.37	23.61	29.12	41.31
17	0	43.47	31.81	26.57	23.52	21.51	20.11	19.14	18.52	18.22	18.21	18.52	19.14	20.12	21.55	23.61	26.72	32.00	43.70
18	0	47.56	36.72	31.67	29.03	27.16	25.86	24.96	24.39	24.11	24.11	24.39	24.97	25.88	27.21	29.12	32.00	36.91	47.76
19	0	56.56	47.60	43.58	41.23	39.68	38.61	37.86	37.39	37.15	37.15	37.39	37.87	38.62	39.72	41.31	43.70	47.76	56.75
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

a

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	55.00	45.71	41.56	39.17	37.62	36.57	35.85	35.41	35.20	35.19	35.41	35.85	36.57	37.62	39.17	41.57	45.71	55.00
3	0	45.71	34.50	29.50	26.62	24.75	23.47	22.62	22.08	21.82	21.82	22.08	22.62	23.47	24.75	26.62	29.51	34.51	45.72
4	0	41.56	29.50	24.12	21.01	19.00	17.63	16.71	16.13	15.85	15.85	16.13	16.71	17.63	19.00	21.02	24.12	29.51	41.57
5	0	39.17	26.62	21.01	17.78	15.69	14.26	13.30	12.70	12.41	12.40	12.70	13.30	14.26	15.69	17.78	21.02	26.62	39.18
6	0	37.62	24.75	19.00	15.69	13.54	12.07	11.09	10.47	10.17	10.17	10.47	11.09	12.07	13.54	15.69	19.00	24.75	37.63
7	0	36.57	23.47	17.63	14.26	12.07	10.59	9.58	8.96	8.65	8.65	8.96	9.58	10.59	12.07	14.26	17.63	23.48	36.57
8	0	35.85	22.62	16.71	13.30	11.09	9.58	8.57	7.93	7.63	7.63	7.93	8.57	9.58	11.09	13.30	16.71	22.62	35.86
9	0	35.41	22.08	16.13	12.70	10.47	8.96	7.93	7.29	6.99	6.99	7.29	7.93	8.96	10.47	12.70	16.13	22.08	35.42
10	0	35.20	21.82	15.85	12.41	10.17	8.65	7.63	6.99	6.68	6.68	6.99	7.63	8.65	10.17	12.41	15.85	21.83	35.20
11	0	35.19	21.82	15.85	12.40	10.17	8.65	7.63	6.99	6.68	6.68	6.98	7.63	8.65	10.17	12.41	15.85	21.82	35.20
12	0	35.41	22.08	16.13	12.70	10.47	8.96	7.93	7.29	6.99	6.98	7.29	7.93	8.95	10.47	12.70	16.13	22.08	35.42
13	0	35.85	22.62	16.71	13.30	11.09	9.58	8.57	7.93	7.63	7.63	7.93	8.57	9.58	11.09	13.30	16.71	22.62	35.86
14	0	36.57	23.47	17.63	14.26	12.07	10.59	9.58	8.96	8.65	8.65	8.95	9.58	10.59	12.07	14.26	17.63	23.48	36.58
15	0	37.62	24.75	19.00	15.69	13.54	12.07	11.09	10.47	10.17	10.17	10.47	11.09	12.07	13.54	15.69	19.01	24.75	37.63
16	0	39.17	26.62	21.02	17.78	15.69	14.26	13.30	12.70	12.41	12.41	12.70	13.30	14.26	15.69	17.79	21.02	26.63	39.18
17	0	41.57	29.51	24.12	21.02	19.00	17.63	16.71	16.13	15.85	15.85	16.13	16.71	17.63	19.01	21.02	24.13	29.51	41.58
18	0	45.71	34.51	29.51	26.62	24.75	23.48	22.62	22.08	21.83	21.82	22.08	22.62	23.48	24.75	26.63	29.51	34.52	45.72
19	0	55.00	45.72	41.57	39.18	37.63	36.57	35.86	35.42	35.20	35.20	35.42	35.86	36.58	37.63	39.18	41.58	45.72	55.01
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

b

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	54.94	45.64	41.49	39.10	37.54	36.49	35.78	35.34	35.12	35.12	35.34	35.78	36.49	37.54	39.10	41.49	45.64	54.94
3	0	45.64	34.42	29.41	26.52	24.65	23.38	22.53	21.99	21.73	21.73	21.99	22.53	23.38	24.65	26.52	29.41	34.42	45.64
4	0	41.49	29.41	24.02	20.91	18.90	17.53	16.61	16.03	15.76	15.76	16.03	16.61	17.53	18.90	20.91	24.02	29.41	41.49
5	0	39.10	26.52	20.91	17.68	15.58	14.16	13.20	12.60	12.31	12.31	12.60	13.20	14.16	15.58	17.68	20.91	26.52	39.10
6	0	37.54	24.65	18.90	15.58	13.44	11.98	10.99	10.37	10.08	10.08	10.37	10.99	11.98	13.44	15.58	18.90	24.65	37.54
7	0	36.49	23.38	17.53	14.16	11.98	10.49	9.49	8.86	8.56	8.56	8.86	9.49	10.49	11.98	14.16	17.53	23.38	36.49
8	0	35.78	22.53	16.61	13.20	10.99	9.49	8.48	7.84	7.54	7.54	7.84	8.48	9.49	10.99	13.20	16.61	22.53	35.78
9	0	35.34	21.99	16.03	12.60	10.37	8.86	7.84	7.21	6.90	6.90	7.21	7.84	8.86	10.37	12.60	16.03	21.99	35.34
10	0	35.12	21.73	15.76	12.31	10.08	8.56	7.54	6.90	6.59	6.59	6.90	7.54	8.56	10.08	12.31	15.76	21.73	35.12
11	0	35.12	21.73	15.76	12.31	10.08	8.56	7.54	6.90	6.59	6.59	6.90	7.54	8.56	10.08	12.31	15.76	21.73	35.12
12	0	35.34	21.99	16.03	12.60	10.37	8.86	7.84	7.21	6.90	6.90	7.21	7.84	8.86	10.37	12.60	16.03	21.99	35.34
13	0	35.78	22.53	16.61	13.20	10.99	9.49	8.48	7.84	7.54	7.54	7.84	8.48	9.49	10.99	13.20	16.61	22.53	35.78
14	0	36.49	23.38	17.53	14.16	11.98	10.49	9.49	8.86	8.56	8.56	8.86	9.49	10.49	11.98	14.16	17.53	23.38	36.49
15	0	37.54	24.65	18.90	15.58	13.44	11.98	10.99	10.37	10.08	10.08	10.37	10.99	11.98	13.44	15.58	18.90	24.65	37.54
16	0	39.10	26.52	20.91	17.68	15.58	14.16	13.20	12.60	12.31	12.31	12.60	13.20	14.16	15.58	17.68	20.91	26.52	39.10
17	0	41.49	29.41	24.02	20.91	18.90	17.53	16.61	16.03	15.76	15.76	16.03	16.61	17.53	18.90	20.91	24.02	29.41	41.49
18	0	45.64	34.42	29.41	26.52	24.65	23.38	22.53	21.99	21.73	21.73	21.99	22.53	23.38	24.65	26.52	29.41	34.42	45.64
19	0	54.94	45.64	41.49	39.10	37.54	36.49	35.78	35.34	35.12	35.12	35.34	35.78	36.49	37.54	39.10	41.49	45.64	54.94
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

в

Рис. 5. Двумерное распределение параметров сходимости P_3 и P_4 по температурам аналитического и численного решений для явной схемы ($\Delta x = \Delta y = 0,1$, $\Delta t = 0,0025$, для сходимости $\Delta t \leq 0,0025$) (а); явной схемы ($\Delta x = \Delta y = 0,1$, $\Delta t = 0,0001$, для сходимости $\Delta t \leq 0,0025$) (б); неявной схемы ($\Delta x = \Delta y = 0,1$, $\Delta t = 0,001$) (в)

В табл. 1, 2 приведены параметры и результаты решения численных схем, используемых при вычислениях с помощью явной и

Таблица 1. Параметры и результаты моделирования для рассматриваемых вычислительных экспериментов с помощью явной схемы

x	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,05	0,01	0,01	0,01	0,005
y	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,05	0,01	0,01	0,01	0,005
	0,01	0,0025	0,001	0,0001	0,000625	0,0001	0,00001	0,000025	0,00001	0,000005	0,0000063
$P_1^{\max}$	127,89	79,01	72,78	70,06	45,49	36,07	35,05	21,02	11,78	8,98	18,47
$P_3^{\max}$	62,3	56,75	55,66	55,01	57,11	55,69	55,45	57,1591	56,20	55,8774	57,142

Таблица 2. Параметры и результаты моделирования для рассматриваемых вычислительных экспериментов с помощью неявной схемы

x	0,1	0,05	0,01	0,005
y	0,1	0,05	0,01	0,005
	0,001	0,001	0,0001	0,001
$P_2^{\max}$	69,76	34,96	7,00	3,50
$P_4^{\max}$	54,94	55,42	55,5577	55,5586

Таким образом, наиболее точные решения тепловой задачи дает неявная численная схема, обеспечивающая наименьшую погрешность в расчетах по температуре, о чем свидетельствует близость моделируемых температур, полученных по аналитической и численной схемам расчета.

Выводы

1. Показано, что при решении тепловых задач наиболее близки к значениям температур, полученным по аналитической схеме, значения температур, полученные по неявной схеме.
2. При уменьшении шага дискретизации по времени значения температур, полученные с помощью явной схемы, приближаются к значениям температур, полученным с помощью неявной схемы.
3. Установлено, что максимальные погрешности параметров расчета в тепловой задаче по различным численным схемам локализованы по углам квадрата.

Литература

1. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1964.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989.
3. Берковский Б.М., Ноготов Е.Ф. Разностные методы исследования задач теплообмена. Мн.: Наука и техника, 1976.
4. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.