



An approximate analytic solving of the problem of the continuously cast slugs hardening and cooling, based on the known schema of thermal layer.

*В. И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ, НАН Беларуси,
Ю. С. ПОСТОЛЬНИК, Днепродзержинский государственный технический университет,
И. А. ТРУСОВА, П. Э. РАТНИКОВ, С. М. КАБИШОВ, Е. В. КАЛИНЕВИЧ, БНТУ*

УДК 669.041

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ РАСПЛАВА С НАЧАЛЬНЫМ ПЕРЕГРЕВОМ МЕТАЛЛА

Теплотехнологические процессы в условиях машиностроительного и металлургического производства происходят в очень широком интервале изменения температур и описываются нелинейными уравнениями. Это прежде всего касается процессов кристаллизации слитков и заготовок, сопровождающихся фазовыми переходами, нагрева в условиях сложного радиационно-конвективного теплообмена и т.д. Но нелинейные задачи теплопроводности точных решений в замкнутой форме не имеют.

Как правило, при моделировании таких процессов исследователи пользуются численными методами. Однако известно, что наряду с гибкостью, высокой точностью и универсальностью численные методы обладают таким серьезным недостатком, как трудность использования для оценочных расчетов; затруднена также возможность параметрической настройки по точному решению. Кроме того, здесь имеют место не до конца решенные вопросы сходимости, устойчивости, оценки погрешностей и т.д.

В такой ситуации возникает необходимость разработки приближенных аналитических методов при расчете затвердевания, охлаждения и нагрева слитков и непрерывнолитых заготовок. В статье приведено приближенное аналитическое решение задачи затвердевания и охлаждения непрерывнолитых заготовок, разливаемых в условиях современных МНЛЗ, основанное на известной схеме термического слоя [1]. Полученное решение позволяет развить основные теоретические положения работы высокотемпературных металлургических агрегатов, получить новые научные выводы, разработать и научно обосновать рациональные режимы работы машин непрерывного литья заготовок, повысить уровень качества выпускаемой металлопродукции.

Математическая модель затвердевания расплава с начальным перегревом металла ($T_0 > T_\phi$) сводится к решению следующей краевой задачи [2–5]:

уравнение теплопроводности в обобщенной постановке для тел базовой геометрии в безразмерном виде

$$\frac{1}{(1-\xi)^m} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^m \frac{\partial \theta_j}{\partial \xi} \right] = K_a^{2-j} \frac{\partial \theta_j}{\partial \tau}, \quad j=1,2; \quad (1)$$

граничные условия

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = Bi_1 \theta_1(0, \tau), \quad (2)$$

$$\theta_j(\xi, \tau) \Big|_{\xi=l(\tau)} = 1, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_j}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0. \quad (4)$$

Математическую модель затвердевания слитков и заготовок упрощают, рассматривая только конвективный теплообмен путем введения суммарного коэффициента теплоотдачи, учитывающем как теплообмен излучением, так и конвекцией (т.е. тепловой поток в каждый момент времени численно равен сумме тепловых потоков радиацией и конвекцией).

Зависимость критерия Bi от времени показывает изменение условий теплообмена в процессе прохождения затвердевающей непрерывнолитой заготовки через различные технологические участки. Граничное условие (3) отражает тот факт, что температура на границе кристаллизующего слоя постоянна и равна температуре кристаллизации. Условие симметричности (4) соответствует реальным условиям охлаждения непрерывнолитых заготовок на современных МНЛЗ.

Уравнения, показывающие зависимость скорости продвижения фронта кристаллизации от температуры, толщины затвердевшей корки и теплофизических свойств стали, а также начальное условие затвердевания, которое определяет распределение температуры по сечению непрерывнолитых заготовок в момент начала кристаллизации, имеют вид

$$K_a Ko l(\tau) = \sum_{j=1}^2 (K_\lambda K_T)^{j-1} \frac{\partial \theta_j}{\partial \xi} \Big|_{\xi=l(\tau)}, \quad \theta_2(\xi, \tau_\phi^0) = \varphi(\xi), \quad (5)$$

где введены температурные симплексы затвердевшей оболочки ($j=1$) [$0 \leq \xi \leq l(\tau)$] и жидкой сердцевины ($j=2$) [$l(\tau) \leq \xi \leq 1$]:

$$\theta_1(\xi, \tau) = \frac{T_1(\xi, \tau) - T_c}{T_\phi - T_c}, \quad \theta_2(\xi, \tau) = \frac{T_0 - T_2(\xi, \tau)}{T_0 - T_\phi}, \quad (6)$$

известные критерии Био, Косовича и число Фурье

$$Bi_j = \frac{\alpha_k R}{\lambda_j}, \quad Ko = \frac{q_\phi}{c_1(T_\phi - T_c)}, \quad Fo = \frac{a_1 t}{R^2}, \quad (7)$$

принимаемые постоянными безразмерные параметры

$$K_T = \frac{T_0 - T_\phi}{T_\phi - T_c}, \quad K_a = \frac{a_2}{a_1}, \quad K_\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad K_\gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}. \quad (8)$$

Для решения поставленной задачи используем метод эквивалентных источников, базирующийся на известной схеме термического слоя [1, 6, 7] (рис. 1).

Данный метод использовался ранее при решении задач нагрева слитков и заготовок [8–12] и показал достаточную надежность и точность полученных решений, что позволило использовать его при совершенствовании и разработке технологий нагрева в печах различных конструкций.

Для определения начальной температурной функции $\varphi(\xi)$ (5) и времени τ_ϕ^0 снятия перегрева необходимо иметь решение задачи предварительного этапа охлаждения расплава до того момента, когда поверхность достигнет температуры кристалли T_ϕ .

Опуская математические выкладки, связанные с решением начальной линейной задачи теплопроводности методом эквивалентных источников в рамках модели термического слоя, на основе решений, приведенных в работах [3, 4, 13], запишем [2]:

$$\varphi(\xi) = 1 - \frac{Bi_2}{2K_T} [1 - (1 - \xi)^2], \quad (9)$$

$$\tau_\phi^0 = \tau_0 + \frac{3 + Bi_2}{3(1+m)Bi_2} [\ln(1 + K_T) - \ln(1 + Bi_2/2)], \quad (10)$$

$$\tau_0 = \frac{1}{12(1+m)} \left[1 + \frac{4}{Bi_2} - \frac{8}{Bi_2^2} \ln(1 + Bi_2/2) \right]. \quad (11)$$

В отдельных случаях ($Bi_2 \ll 1$ $Bi_2 \gg 1$) выражение (11), определяющее период τ_0 протекания инерционного этапа предварительного охлаждения

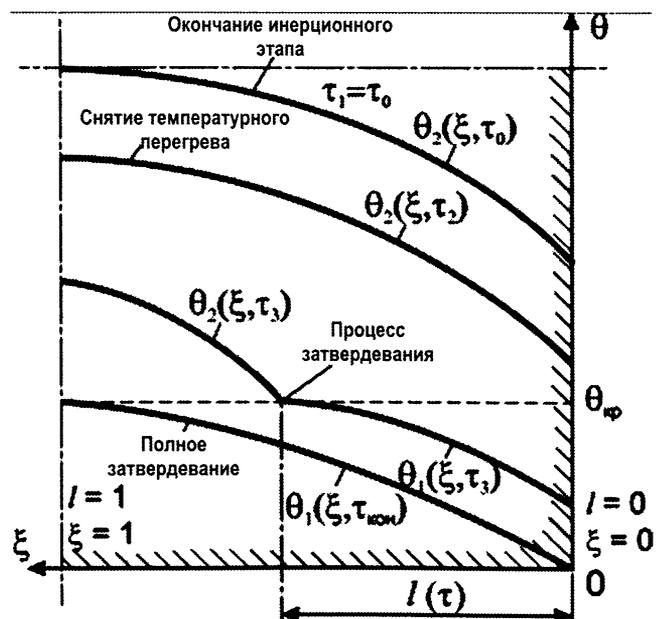


Рис. 1. Схема теплового пограничного слоя в процессе затвердевания металла с начальным перегревом: τ_1 — время инерционного периода; τ_2 — время снятия перегрева; τ_3 — время кристаллизации

расплава, приводит соответственно к формулам $\tau_0 = [6(1+m)]^{-1}$ и $\tau_0 = [12(1+m)]^{-1}$ при $Bi = \text{const}$, $\theta_c = 1$.

Дальнейший отсчет времени будем проводить от момента τ_ϕ^0 начала процесса затвердевания. Решение задачи (1)–(5) с помощью МЭИ привело [2, 13] к следующим функциям:

$$\theta_1(\xi, \tau) = \theta_1^*(\xi, \tau) - \frac{f_1(\tau)}{2(1+m)} \left\{ \left[(1-\xi)^2 - \frac{2+Bi_1}{Bi_1} \right] - \left[(1-l(\tau))^2 - \frac{2+Bi_1}{Bi_1} \right] \theta_1^*(\xi, \tau) \right\}, \quad (12)$$

$$\theta_1^*(\xi, \tau) = \frac{(1-m) + Bi_1 [1 - (1-\xi)^{1-m}]}{(1-m) + Bi_1 \{1 - [1-l(\tau)]^{1-m}\}}, \quad (13)$$

$$\theta_2(\xi, \tau) = 1 - \frac{f_2(\tau)}{2(1+m)} \left\{ (1-\xi)^2 - [1-l(\tau)]^2 \right\}, \quad (14)$$

где

$$f_1(\tau) = \frac{2Bi_1 K_a [1-l(\tau)] [6 + 3Bi_1 l(\tau) - Bi_1 l^2(\tau)]}{3 \{2[1 + Bi_1 l(\tau)] - Bi_1 l^2(\tau)\}^2} l(\tau); \quad (15)$$

$$f_2(\tau) = -\frac{4}{3} (1 - \varphi_u) l(\tau). \quad (16)$$

Таким образом, получены решения температурного профиля по сечению заготовки в различные моменты времени. Решения включают в себя зависимости толщины затвердевшей корки от времени, а также скорость кристаллизации. Температурные поля зависят от критерия Bi , который характеризует теплообмен тела с окружающей средой, т.е. методика позволяет рассчитывать процессы твердения непрерывнолитых заготовок.

Динамика процесса кристаллизации определяется калориметрическим условием Стефана (5), подстановка в которое функций (12)–(16) приводит к дифференциальному уравнению [2, 13]:

$$[F_1(l) + F_2(l) + F_3(l)] dl = d\tau, \quad (17)$$

где

$$F_1(l) = \frac{K_a K_0 (1-m + Bi_1) [1-l(\tau)]^m - Bi_1 [1-l(\tau)]}{Bi_1 (1-m)}; \quad (18)$$

$$F_2(l) = \frac{4K_\lambda K_T (1-\varphi_u) [1-l(\tau)]^{m+1} - Bi_1 [1-l(\tau)]^2}{3(1+m)Bi_1 (1-m)}; \quad (19)$$

$$F_3(l) = \frac{2K_a [3 + Bi_1 l(\tau)]}{3(1+m)[2 + Bi_1 l(\tau)]} [1+m - ml(\tau)] l(\tau) [1-l(\tau)]. \quad (20)$$

Интегрирование полного уравнения (17) привело к трансцендентному выражению [2, 3]

$$\begin{aligned} & \frac{K_a K_0 (2 + Bi_1)}{2(1+m)Bi_1} \left[1 - \frac{2(1-m + Bi_1)(1-l)^{1+m} - (1+m)Bi_1(1-l)^2}{(1-m)(2 + Bi_1)} \right] + \\ & + \frac{4K_\lambda K_T (1-\varphi_u)(3 + Bi_1)}{9(1+m)(2+m)Bi_1} \left[1 - \frac{3(1-m + Bi_1)(1-l)^{2+m} - (2+m)Bi_1(1-l)^3}{(1-m)(3 + Bi_1)} \right] + \\ & + \frac{2K_a}{3(1+m)Bi_1^3} \left\{ [(1+m)Bi_1^2 + 2(1+2m)Bi_1 + 4m] \left[l - \frac{2}{Bi_1} \ln \left(1 + \frac{Bi_1 l}{2} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{Bi_1 l^3}{2} [(1+m)Bi_1^2 - (1+2m)Bi_1 - 2m] + \frac{Bi_1^2 l^3}{3} [m - (1+2m)Bi_1] + \frac{mBi_1^3 l^4}{4} \right\} = \tau. \end{aligned} \quad (21)$$

Для определения положения фронта $l(\tau)$ кристаллизации в произвольный момент времени τ ($\tau_\phi^0 \leq \tau \leq \tau_\phi$) выражение (21) было представлено [3] в следующем виде:

$$H(l)[1 + \beta_1(l) + \beta_2(l)] = \tau, \tag{22}$$

где

$$H(l) = \frac{(2 + Bi_1)K_aKo}{2(1+m)Bi_1} \left[1 - \frac{2(1-m+Bi_1)(1-l)^{1+m} - (1+m)Bi_1(1-l)^2}{(1-m)(2+Bi_1)} \right]; \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \beta_1(l) = & \frac{4[2m + (1+m)Bi_1]}{3KoBi_1^2} \left[1 - \frac{2(1-m+Bi_1)(1-l)^{1+m} - (1+m)Bi_1(1-l)^2}{(1-m)(2+Bi_1)} \right] \times \\ & \times \left\{ \left[l - \frac{2}{Bi_1} \ln \left(1 + \frac{Bi_1 l}{2} \right) \right] + \frac{Bi_1 l^2}{12(2+Bi_1)[2m + (1+m)Bi_1]} \right\} \times \\ & \times \left[6\{(1+m)Bi_1^2 - (1+2m)Bi_1 - 2m\} + 4Bi_1\{m - (1+2m)Bi_1\}l + 3mBi_1^2 l^2 \right]; \end{aligned} \tag{24}$$

$$\beta_2(l) = \frac{8 \left[(1-m)(3+Bi_1) - 3(1-m+Bi_1)(1-l)^{2+m} + (2+m)Bi_1(1-l)^3 \right]}{9(2+m)Pk \left[(1-m)(2+Bi_1) - 2(1-m+Bi_1)(1-l)^{1+m} + (1+m)Bi_1(1-l)^2 \right]}. \tag{25}$$

Уравнение (22) разрешаем путем методов уточняющих приближений, например, с помощью метода секущих (метод касательных Ньютона) относительно положения фронта кристаллизации, причем толщина затвердевшей корки рассматривается как функции времени. В качестве приближенного значения корня уравнения используется значение на предыдущей временной итерации. Таким образом, задаваясь временем, мы находим положение фронта кристаллизации.

Достоинством предложенной методики является то, что исследователи могут, задаваясь временем и условиями теплообмена, определять положение фронта кристаллизации и температурные поля. Это позволяет исследовать закономерности затвердевания непрерывнолитой заготовки в зависимости от скорости разлива и условий охлаждения.

Из формулы (22) вытекает, что физическое тепло, теряемое затвердевшей оболочкой, учитывается составляющей $\beta_1(l)$ (24), а наличие перегрева – $\beta_2(l)$ (25).

При определении динамики продвижения фронта кристаллизации приходим к уравнению

$$v_\phi = l(\tau) = l(l)l[1 + \omega_1(l) + \omega_2(l)], \tag{26}$$

$$v_\phi^* = l(l) = \frac{(1-m)Bi_1}{K_aKo} \left[(1-m+Bi_1)(1-l)^m - Bi_1(1-l) \right]^{-1}, \tag{27}$$

где

$$\omega_1(l) = \frac{2(1-m)Bi_1(3+Bi_1l)[1+m(1-l)](1-l)^{1-m}l}{3(1+m)Ko(2+Bi_1l)[(1-m)+Bi_1-Bi_1(1-l)^{1-m}]}; \tag{28}$$

$$\omega_2(l) = \frac{4(1-l)}{3(1+m)Pk}; \quad Pk = \frac{q_\phi}{c_2(T_0 - T_\phi)}; \tag{29}$$

Pk – критерий Постоляника – критерий начального перегрева расплава.

Эти уравнения позволяют рассчитывать динамику перемещения фронта кристаллизации по сечению заготовки и глубину жидкой лунки.

Для оценки адекватности описания процессов затвердевания непрерывнолитых заготовок с помощью предложенной методики (9)–(29) было осуществлено сравнение результатов расчета

математической модели затвердевания и охлаждения непрерывнолитых заготовок с экспериментальными результатами, приведенными в работах [5, 10] (рис. 2). В качестве температуры кристаллизации принимали температуру выливаемости, что, как показано в работе [5], не приводит к существенным искажениям результатов при кристаллизации углеродистых сталей:

$$T_{\text{выл}} = T_{\text{лик}} - A(T_{\text{лик}} - T_{\text{сол}}), \quad (30)$$

где $A \sim 0,1 - 0,15$.

Результаты расчетов (рис. 2) показали, что относительная погрешность вычислений по приведенной методике (9)–(29) для процессов непрерывной разливки при определении времени затвердевания не превышает 6%, а при вычислении температуры – 3,5%.

Выводы

Сформулирована нелинейная математическая модель расчета температурных полей в процессе затвердевания стальных слитков и заготовок с учетом начального перегрева расплава. Разработан алгоритм решения математической модели с помощью «метода эквивалентных источников», причем впервые в теории затвердевания этот метод адаптирован для решения задач затвердевания и охлаждения непрерывнолитых заготовок. Отличительной особенностью предложенной методики от существующих является то, что, задаваясь временем, условиями теплообмена и теплофизическими параметрами стали, можно определить положение фронта кристаллизации и температурные поля по сечению слитков и заготовок. Это позволяет исследовать закономерности затвердевания непрерывнолитых заготовок в зависимости от скорости разливки, условий охлаждения, конструктивных параметров МНЛЗ. Выполнено сравнение результатов расчета процессов затвердевания слитков в изложнице и непрерывнолитых заготовок на МНЛЗ с экспериментальными данными и результатами численного моделирования, которое показало адекватность предложенной методики.

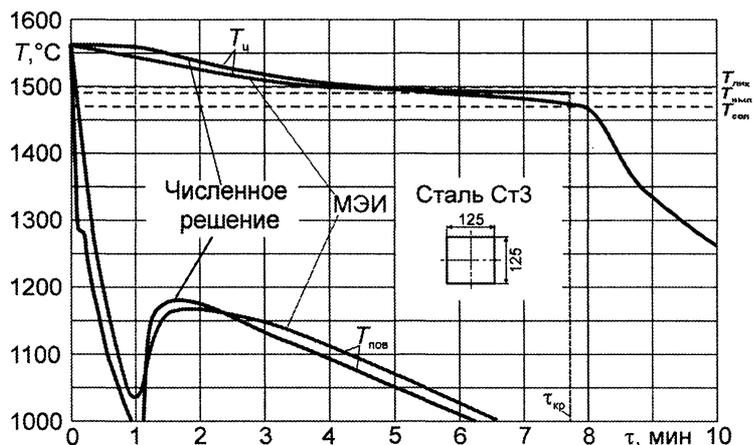


Рис. 2. Сравнение результатов расчета затвердевания непрерывнолитой заготовки сечением 125x125 мм из стали Ст3, полученных с помощью формул (10)–(14), с данными численного моделирования

Литература

1. Лыков А.В. Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1970. № 5. С. 109–150.
2. Постольник Ю.С. Приближенное исследование процесса симметричного затвердевания отливок при конвективном охлаждении // Изв. вузов. Черная металлургия. 1971. № 6. С. 155–160.
3. Постольник Ю.С. Вопросы нелинейной теории нагрева и охлаждения металла: Автореф. дис. ... д-р техн. наук. Днепропетровск, 1980.
4. Постольник Ю.С., Огурцов А.П., Решетняк І.С. Основы металлургической термомеханики. Дніпродзержинськ: ДДТУ, 1998.
5. Самойлович Ю.А., Тимошпольский В.И., Трусова И.А., Филиппов В.В. Стальной слиток. В 3-х т. Т.2. Затвердевание и охлаждение / Под общ. ред. В.И.Тимошпольского, Ю.А.Самойловича. Мн.: Беларуская наука, 2000.
6. Постольник Ю.С. Метод эквивалентных источников в задачах нестационарной теплопроводности // Теплообмен и гидродинамика. Киев: Наукова думка, 1977. С. 161–167.
7. Тимошпольский В.И., Постольник Ю.С., Андрианов Д.Н. Теоретические основы теплофизики и термомеханики в металлургии. Мн.: Беларуская наука, 2005.
8. Тимошпольский В.И. Теплотехнологические основы металлургических процессов и агрегатов высшего технического уровня. Мн.: Навука і тэхніка, 1995.
9. Стальной слиток. В 3-х т. Т.3. Нагрев / В.И. Тимошпольский, Ю.А. Самойлович, И.А.Трусова и др.; Под общ. ред. В.И.Тимошпольского, Ю.А.Самойловича. Мн.: Беларуская наука, 2001.
10. Промышленные теплотехнологии: Моделирование нелинейных процессов: Учеб. / В.И.Тимошпольский, И.А.Трусова, А.П.Несенчук и др.; Под общ. ред. В.И.Тимошпольского, А.П.Несенчука. Мн.: Выш. шк., 2000.
11. Теория противоточного теплообмена при нагреве заготовок и слитков в пламенных печных агрегатах / В.И.Тимошпольский, Ю.С. Постольник, А.П.Огурцов / Тез. докл. и сообщ. ММФ. 2004, ИТМО НАН Беларуси (24–28 мая 2004 г.). Т.2. С. 396–398.
12. Постольник Ю.С., Тимошпольский В.И. Радиационно-конвективный нагрев неограниченного цилиндра с функционально-зависящими теплофизическими характеристиками // Изв. вузов. Энергетика. 1980. №3. С. 121–124.
13. Постольник Ю.С. Приближенные методы исследований в термомеханике. Киев–Донецк: Вища шк., 1984.