



The method for numerical simulation of thermostressed state of the objects of spatial configuration, moving in multizone temperature field of furnace, is offered. The three-dimensional computer calculations of the moving ingot in terms of different variants of stage heating are carried out.

А. Н. ЧИЧКО, А. С. БОРОЗДИН, БНТУ

УДК 669.27:519

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАСЧЕТА ТЕРМОУПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛИТКА ПРИ МНОГОСТУПЕНЧАТОМ НАГРЕВЕ

Компьютерное моделирование процессов нагрева промышленных слитков является одной из сложнейших в теории металлургических процессов. Сложность моделирования в значительной степени связана с тем, что промышленные слитки в расчетах необходимо характеризовать тремя пространственными координатами и одной временной. Поэтому значительная часть работ этого направления в большей степени связана с построением математических моделей, иногда очень упрощенных (одно- и двумерный стационарные варианты). Что же касается конкретных численных расчетов процессов для трех- или четырехмерного (динамика) случая, то этому вопросу в литературе уделено еще недостаточно внимания. По-прежнему, одним из актуальных вопросов является расчет температурных напряжений для слитка, движущегося в изменяющемся температурном поле. Многочисленные постановки задач в одно- и двумерном случаях, ориентированные на уравнение теплопроводности, к сожалению, не дают полной пространственной картины изменения температур и напряжений во времени. В то же время расчеты напряжений требуют использования уравнений равновесия совместно с уравнением теплопроводности. Причем необходимо использование динамических температурных условий. К сожалению, общепризнанных устойчивых алгоритмов решения таких задач все еще нет.

Цель данной работы — разработка метода, алгоритмов и программного обеспечения для моделирования термоупругих характеристик пространственного объекта произвольной конфигурации с динамическими граничными условиями и применение разработанных моделей и программного обеспечения для расчета температурных напряжений, возникающих в объекте типа «слиток» при ступенчатом нагреве.

Математическая модель задачи расчета температурных напряжений основана на совместном

решении трех систем уравнений из теории термоупругости:

а) дифференциального уравнения равновесия в точке твердого тела

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} — соответственно нормальные напряжения по осям x , y и z ; σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{zx} — касательные напряжения по осям x , y и z ; X , Y , Z — компоненты объемных сил в направлениях x , y , z ;

б) второй формы обобщенного закона Гука, учитывающего влияние температурных деформаций на напряжения

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda e + 2\mu \epsilon_{xx} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T, \\ \sigma_{yy} = \lambda e + 2\mu \epsilon_{yy} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T, \\ \sigma_{zz} = \lambda e + 2\mu \epsilon_{zz} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T, \\ \sigma_{xy} = 2\mu \gamma_{xy}, \quad \sigma_{yz} = 2\mu \gamma_{yz}, \quad \sigma_{zx} = 2\mu \gamma_{zx}, \end{cases} \quad (2)$$

где $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ — коэффициенты

Ламе; E — модуль Юнга; ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} — нормальные деформации; γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} — касательные деформации; $e = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$ — объемная деформация; α — коэффициент линейного расширения материала; ν — коэффициент Пуассона;

в) уравнения Коши, определяющие соотношения между деформациями и перемещениями:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned} \right. \quad (3)$$

где u, v, w – соответственно компоненты вектора перемещения по осям x, y и z .

Расчет температурного поля нагреваемого объекта проводили на основе уравнения теплопроводности Фурье

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\lambda(T)}{c(T)\rho(T)} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right], \quad x, y, z, \tau \in \Omega, \quad (4)$$

где $c(T)$ – функция теплоемкости, Дж/(кг·К); $\rho(T)$ – функция плотности, кг/м³; $\lambda(T)$ – функция теплопроводности, Вт/(м·К); Ω ($0 \leq x < X, 0 \leq y < Y, 0 \leq z < Z, 0 \leq \tau < t$) – пространственно-временная область расчета.

Для задания краевых условий, учитывающих взаимодействие между нагревающей средой и поверхностью объекта, перемещающегося с постоянной скоростью x в печи с различными тепловыми зонами, использовали следующую систему уравнений [1]:

$$T(x, y, z, \tau) = \left\{ \begin{aligned} &T_0, \tau = 0, \\ &T_1, 0 < \tau \leq \frac{L_1}{v}, \\ &T_2, \frac{L_1}{v} < \tau \leq \frac{L_1 + L_2}{v}, \\ &\dots \\ &T_n, \frac{\sum_{k=1}^{n-1} L_k}{v} < \tau \leq \frac{\sum_{k=1}^n L_k}{v}, \end{aligned} \right. \quad (5)$$

где T_0 – начальная температура заготовки; n – число тепловых зон в рабочем пространстве печи; T_i ($i=1, 2, \dots, n$) – значение температуры в i -й тепловой зоне, °С; L_i ($i=1, 2, \dots, n$) – протяженность i -й тепловой зоны, м; x – скорость перемещения заготовки вдоль рабочего пространства печи, м/с.

В представленной математической модели введен ряд упрощающих допущений:

- температура в каждой зоне фиксирована, т.е. каждая точка тепловой зоны имеет температуру, соответствующую данной зоне;
- тело считается изотропным – температурное расширение одинаково во всех направлениях;
- деформации, возникающие в теле, не влияют на температурное поле данного объекта;
- деформации, возникающие вследствие температурных напряжений, незначительны и соответствуют упругой области.

На базе конечно-разностной аппроксимации описанной математической модели и клеточно-автоматного подхода были разработаны набор алгоритмов и программа для трехмерного моделирования термоупругих характеристик объекта типа «слиток» при взаимодействии с динамической нагревающей средой. Численное моделирование на основе клеточно-автоматного подхода представляет собой итерационный алгоритм. Каждый такт (итерация) расчета термонапряженного состояния слитка состоит из последовательного решения ряда подзадач.

На первом этапе рассчитывали температурное поле объекта моделирования (в данном случае слитка). Расчет проводили решением уравнения (4) с граничными и начальными условиями (5), позволяющими учитывать взаимодействие нагревающей среды, которая имеет ряд температурных зон и движение нагреваемого объекта с постоянной скоростью x вдоль рабочего пространства печи. Численное решение уравнения нестационарной теплопроводности осуществляли по экономичной локально-одномерной схеме [1].

Для решения задачи термоупругости при заданном температурном поле была выбрана постановка задачи в перемещениях. Ниже представлено дифференциальное уравнение равновесия для прямоугольной системы координат, записанное через перемещения (уравнение Ламе):

$$\left\{ \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u - (3\lambda + 2\mu)\alpha \frac{\partial T}{\partial x} + X &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 v - (3\lambda + 2\mu)\alpha \frac{\partial T}{\partial y} + Y &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \nabla^2 w - (3\lambda + 2\mu)\alpha \frac{\partial T}{\partial z} + Z &= 0, \end{aligned} \right. \quad (6)$$

где $e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ – объемная деформация.

Конечно-разностную аппроксимацию системы (6) решали при помощи попеременно треугольного метода [2]. Численное решение данного уравнения требует задания компонент вектора перемещения для граничной поверхности модели-

руемого объекта. Для вычисления граничных условий для расчета перемещений для объектов типа «слиток» с известным распределением температурного поля был разработан оригинальный алгоритм, использующий клеточно-автоматную модель программы.

Далее на основе вычисленных значений компонент вектора перемещений проводили определение деформаций. Имея компоненты вектора перемещения для всех точек тела и используя разностные аппроксимации для уравнений из системы (3), производили расчет нормальных и касательных деформаций:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{u_{x+1} - u_{x-1}}{2\Delta x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{v_{y+1} - v_{y-1}}{2\Delta y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{w_{z+1} - w_{z-1}}{2\Delta z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{v_{x+1} - v_{x-1}}{2\Delta x} + \frac{u_{y+1} - u_{y-1}}{2\Delta y}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{w_{y+1} - w_{y-1}}{2\Delta y} + \frac{v_{z+1} - v_{z-1}}{2\Delta z}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{u_{z+1} - u_{z-1}}{2\Delta z} + \frac{w_{x+1} - w_{x-1}}{2\Delta x}. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Завершает итерацию расчет напряжений, который производили подстановкой рассчитанных значений деформации в систему (2).

На рис. 1 представлена блок-схема описанной выше итерации расчета.

Разработанная программа была применена для компьютерного моделирования процесса нагрева фрагмента слитка размерами 250x250x300 мм в

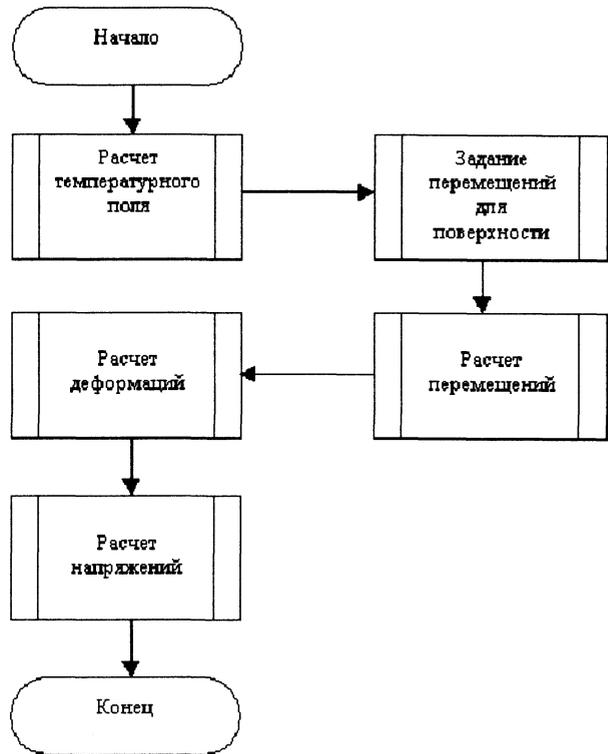


Рис. 1. Блок-схема итерации расчета термонапряженного состояния тела в условиях нестационарного температурного поля

шаговой печи, имеющей пять температурных зон. Материалом слитка была выбрана сталь 40X с теплофизическими характеристиками, являющимися функциями от температуры. В табл. 1 приведены значения плотности, теплоемкости, теплопроводности, линейного коэффициента расширения и модуля упругости, использовавшихся в расчетах температурных полей и полей напряжений. На рис. 2 показано схематическое изображение печи и слитка.

Таблица 1. Теплофизические характеристики стали 40X

Характеристики сплава	Температура, °C								
	0	100	200	300	400	500	600	700	800
с, кг/м ³	7820	7800	7770	7740	7700	7670	7630	7590	7610
с, Дж/(кг·°C)	496	508	529	563	592	622	634	664	684
λ, Вт/(м·°C)	41,0	40,0	38,0	36,0	34,0	33,0	31,0	30,0	27,0
α, 10 ⁻⁶ 1/°C	11,8	12,2	13,2	13,7	14,1	14,6	14,8	12,0	12,0
E, 10 ⁹ Н/м ²	214	211	206	203	185	176	164	143	132

Рабочее пространство печи принимали заполненным воздухом со следующими теплофизическими характеристиками: λ=0,034Вт/(м·К), с=1009 Дж/(кг·К), ρ=1,29 кг/м³ и температурой, зависящей от конкретной тепловой зоны.

Расчеты проводили для трех вариантов конфигураций рабочего пространства печи. Значения температур для каждой тепловой зоны для моделируемых режимов нагрева приведены в табл. 2.

Таблица 2. Варианты конфигураций рабочего пространства модельной печи

Номер режима нагрева	T ₁ , °C	T ₂ , °C	T ₃ , °C	T ₄ , °C	T ₅ , °C
1	800	800	800	800	800
2	180	330	490	640	800
3	200	350	500	550	800

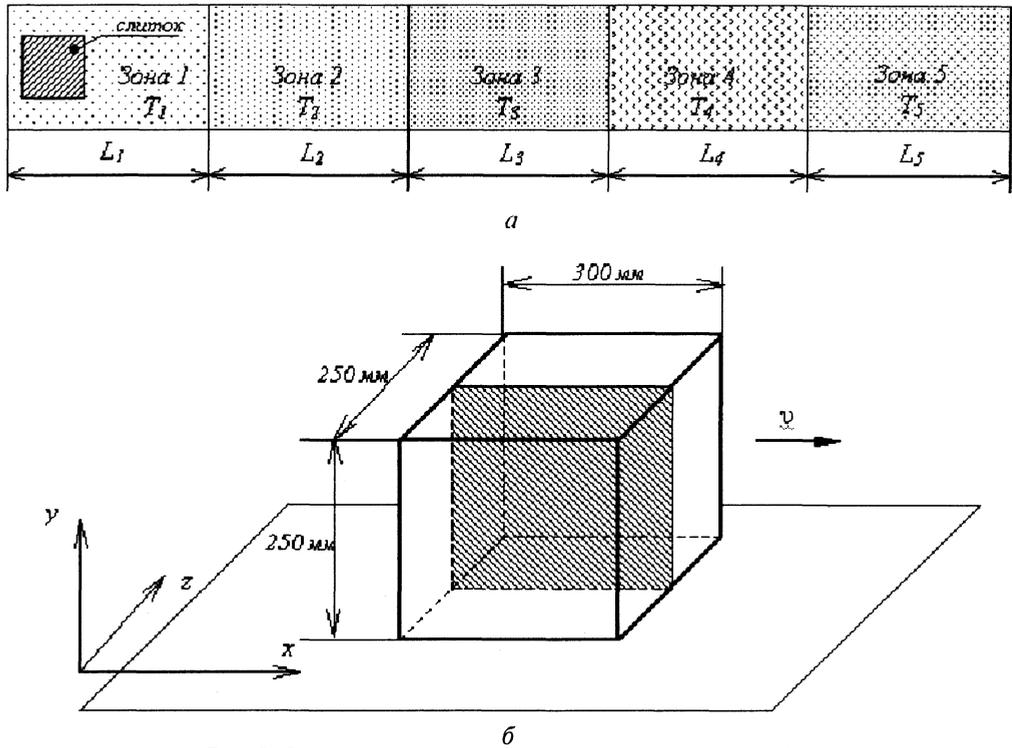


Рис. 2. Схема рабочего пространства печи (а) и слитка (б)

Время моделирования выбирали таким, чтобы при заданной скорости движения слиток прошел вдоль всего рабочего пространства печи.

Далее представлены результаты проведенных вычислительных экспериментов по расчету напряженно-деформированного состояния слитка. На рис. 3 изображены поверхности, описывающие поле температурных напряжений $\sigma^* = 1/3(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$ для сечения слитка плоскостью YX . На рис. 2, б штриховкой выделена секущая плоскость.

Каждая конфигурация поверхности напряжений соответствует различным моментам времени. Из рисунков видно, что поверхности напряжений для слитков имеют куполообразную конфигурацию, изменяющуюся от времени движения слитка. Поверхности напряжений позволяют наглядно оценить пиковые значения напряжений в конкретный момент времени процесса нагрева для выбранного сечения слитка.

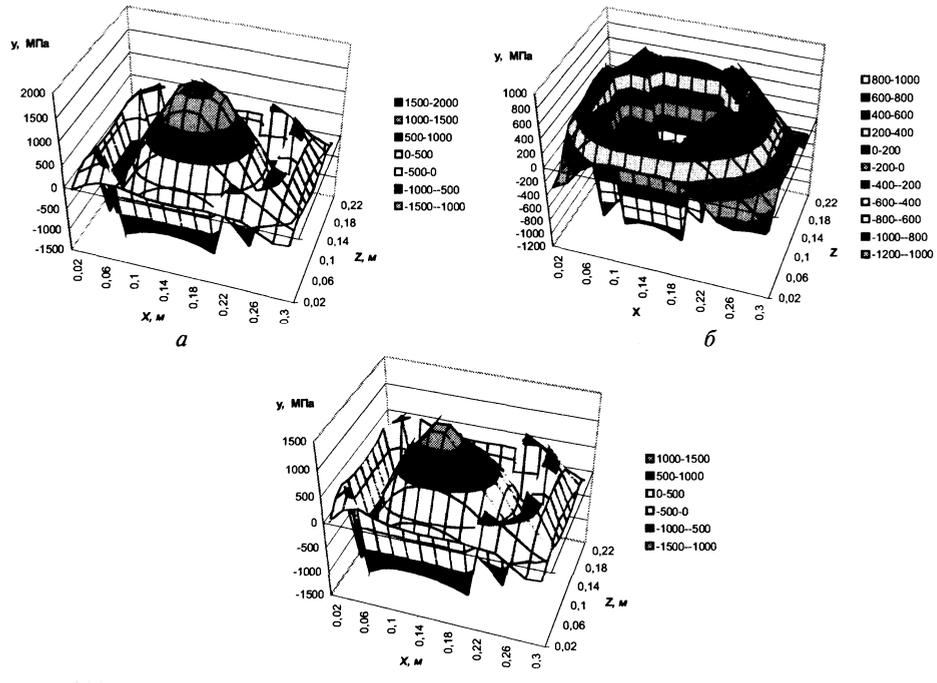
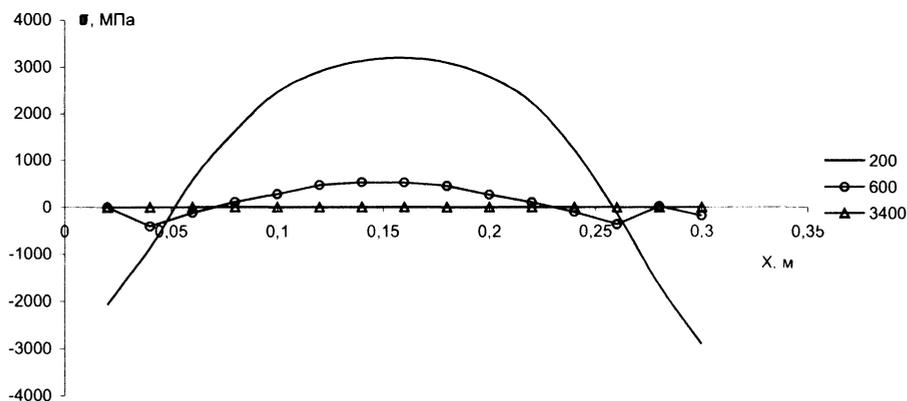


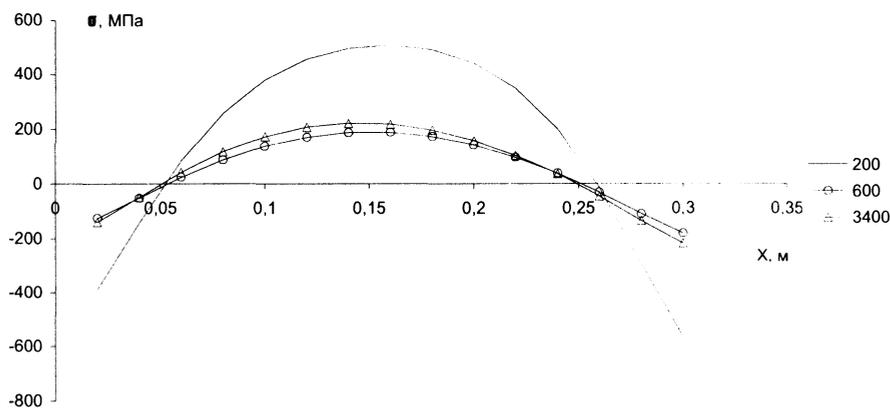
Рис. 3. Поверхности температурных напряжений для центрального слитка плоскостью YX для различных режимов нагрева: а – нагрев слитка по режиму 1, $T_1=T_2=T_3=T_4=T_5=800$ °С, $\tau=600$ с; б – нагрев слитка по режиму 2, $T_1=180$ °С, $T_2=330$, $T_3=490$, $T_4=640$, $T_5=800$ °С, $\tau=3200$ с; в – нагрев слитка по режиму 3, $T_1=200$ °С, $T_2=350$, $T_3=500$, $T_4=550$, $T_5=800$ °С, $\tau=3200$ с

На рис. 4 показана динамика изменения нормальных напряжений к оси X (σ_x) в слитке с течением времени при нагреве слитка. Из анализа зависимостей, приведенных на рис. 4, *а*, видно, что если температурное поле печи однородно (все тепловые зоны имеют одинаковую температуру), напряжения в слитке имеют тенденцию к уменьшению. При неоднородном температурном поле рабочего пространства печи поля напряжений носят сложный характер даже после достаточно продолжительного нагрева.

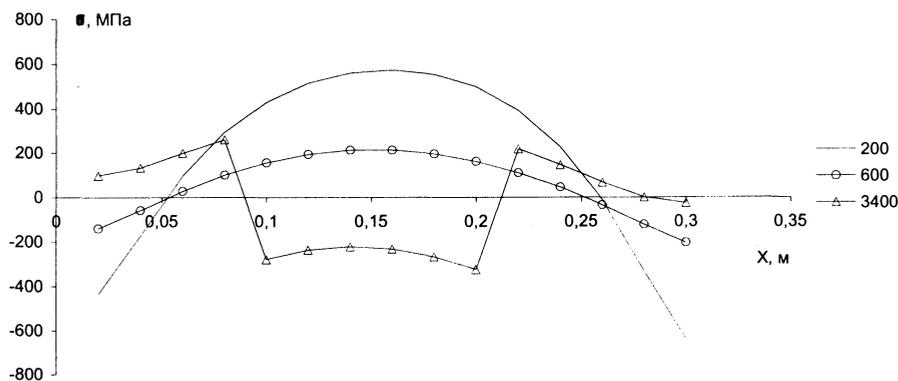
Представленные вычислительные эксперименты наглядно демонстрируют возможности компьютерного моделирования и анализа температурных напряжений, возникающих при нагреве слитков с динамическими характеристиками нагревающей среды. Предложенная математическая модель процесса термоупругости позволяет моделировать характеристики термонапряженного состояния, вызванного нагревом (напряжения, деформации и перемещения).



а



б



в

Рис. 4. Нормальные напряжения к оси X , возникающие в центральном сечении слитка в моменты времени 200, 600 и 3400 с для различных режимов нагрева: *а* – нагрев слитка по режиму 1; *б* – нагрев слитка по режиму 2; *в* – нагрев слитка по режиму 3

Литература

1. Чичко А.Н., Бороздин А.С. Численное моделирование процесса нагрева движущегося слитка // Литье и металлургия. 2003. №4. С. 60–63.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.