



*The mathematical models for calculation of stresses in chill mold, arising at its filling with melt, are offered. The possibilities of modeling of dynamics of the shaped casting mold stressed state are shown by the example of casting "grid", produced by casting into chill mold.*

А. Н. ЧИЧКО, БНТУ, Л. В. МАРКОВ, ОАО «ММЗ»

УДК 519:669.27

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ КОКИЛЯ С ЦЕЛЮ ПОВЫШЕНИЯ ЕГО СТОЙКОСТИ

Известно, что кокильная оснастка работает в условиях многократных термических нагрузок, возникающих при заполнении формы металлом и кристаллизации отливки. При этом напряжения, возникающие в металлической форме в процессе ее эксплуатации, вызывают коробление и образование сетки разгара на рабочей поверхности кокиля, что является причиной снижения стойкости кокиля. Существующие экспериментальные, тензометрические методы исследования напряженного состояния кокилей отличаются сложностью, трудоемкостью и не позволяют определить напряжения на поверхности кокиля. В связи с этим аналитическое исследование температурных напряжений кокилей представляет как практический, так и теоретический интерес. Следует отметить, что в теории кокильного литья рассматривают в основном три типа кокилей: плоские, цилиндрические, сферические. Однако на практике при получении промышленных отливок используются очень сложные по пространственной конфигурации кокили, которые не могут быть отнесены к этим двум группам. Поэтому математический формализм, который может быть предложен конструктору, часто не работает. В результате плохо спроектированный кокиль приводит к браку отливок, а часто имеет низкий уровень стойкости, что влияет на экономические показатели процесса получения отливки. Поэтому исследование температурных напряжений кокилей в зависимости от основных конструктивных и технологических факторов представляет одну из актуальнейших проблем теории литейного производства.

Наиболее перспективным направлением решения данной проблемы является математическое моделирование процесса нагрева кокиля в условиях заполнения его расплавом [1]. В процессе нагрева кокиля в различных пространственных точках формируются термические напряжения, которые существенно влияют на его стойкость.

Цель настоящей работы – разработка математического аппарата для трехмерного расчета напряжений в кокиле при заполнении его расплавом и его апробация на отливке «решетка», получаемой на Могилевском металлургическом заводе.

Для расчета течения охлаждающихся расплавов была построена модель, состоящая из уравнений Навье–Стокса и Фурье–Кирхгофа, дополненная уравнением неразрывности [2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_x}{\partial \tau} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_y}{\partial \tau} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) - g, \\ \frac{\partial V_z}{\partial \tau} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right), \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \rho = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{c(T)\rho} \left( \frac{\partial \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right)}{\partial z} \right) + \frac{F(x, y, z, \tau)}{c(T(x, y, z, \tau))\rho}, \quad (3)$$

где  $\tau$  – время течения расплава;  $x, y, z$  – декартовы координаты (ось  $Y$  направлена вертикально);  $V_x, V_y, V_z$  – соответственно проекции скоростей элементов расплава на координатные оси  $X, Y, Z$ ;  $P(\tau)$  – давление в расплаве;  $\rho$  – плотность расплава;  $\eta$  – динамическая вязкость;  $T$  – температура;  $\lambda(T)$  – коэффициент теплопроводности расплава;  $c(T)$  – удельная теплоемкость расплава;  $F(x, y, z, \tau)$  – функция объемной плотности мощности выделения теплоты при кристаллизации.

Систему (1)–(3) применяли для расчета температурного поля, которое задает начальные условия задачи с целью дальнейшего определения характеристик термоупругости (деформации, напряжения). Для решения задачи термоупругости использовали систему, построенную на синтезе уравнений теории термоупругости и клеточно-автоматных правил, дополненных граничными условиями. В основу расчета положено уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho\rho} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{F(x, y, z, \tau)}{c\rho}, \quad (4)$$

где  $F(x, y, z, \tau)$  – функция объемной плотности, моделируемая как:

$$F(x, y, z, \tau) = \begin{cases} Q^n(x, y, z) = Q^{n-1}(x, y, z) - c\Delta T, & \text{если } T_{x,y,z,\tau} \leq T_{кр} \text{ и } Q^{n-1}(x, y, z) \neq 0, \\ 0, & \text{если } T_{x,y,z,\tau} \leq T_{кр} \text{ и } Q^{n-1}(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$Q^{n=0}(x, y, z) = Q_{кр},$$

где  $Q_{кр}$  – максимальная плотность энергии, выделившейся при кристаллизации металла;  $Q^n(x, y, z)$  – плотность энергии на временном слое  $n$ , выделившейся в данной точке с координатами  $(x, y, z)$ ;  $T$  – температура;  $x, y, z$  – декартовы координаты;  $\tau$  – время;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала;  $c$  – теплоемкость материала;  $\rho$  – плотность материала;  $n$  – временной слой.

Уравнение теплопроводности было дополнено системой равновесия [3] (теория изотермической упругости), соотношениями Коши и системой для расчета напряжений в среде Гука:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho \bar{X} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho \bar{Y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho \bar{Z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \end{cases} \quad (7)$$

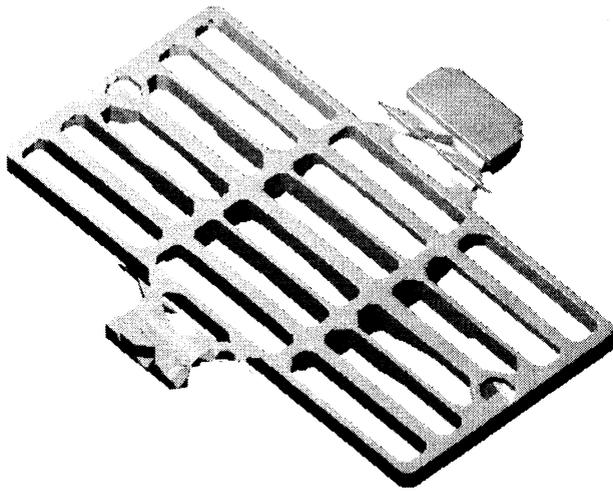
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = 2G \left( \varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \right), \\ \sigma_y = 2G \left( \varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \right), \\ \sigma_z = 2G \left( \varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \right), \\ \tau_{xy} = G \gamma_{xy}, \\ \tau_{yz} = G \gamma_{yz}, \\ \tau_{zx} = G \gamma_{zx}, \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \left( \frac{1}{\partial t} + \frac{1}{k} \right) = 2G \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \right), \\ \sigma_y \left( \frac{1}{\partial t} + \frac{1}{k} \right) = 2G \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \right), \\ \sigma_z \left( \frac{1}{\partial t} + \frac{1}{k} \right) = 2G \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \right), \\ \tau_{xy} \left( \frac{1}{\partial t} + \frac{1}{k} \right) = G \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{xy}, \\ \tau_{yz} \left( \frac{1}{\partial t} + \frac{1}{k} \right) = G \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{yz}, \\ \tau_{zx} \left( \frac{1}{\partial t} + \frac{1}{k} \right) = G \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{zx}, \end{array} \right. \quad (9)$$

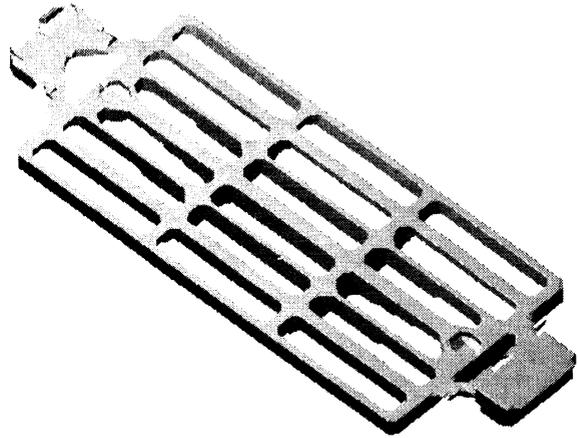
где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  – деформации элементов структуры по осям  $x, y, z$  (общая деформация  $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ );  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  – касательные деформации элементов структуры плоскостей  $xy, yz, zx$ ;  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  – напряжения элементов структуры по осям  $x, y, z$ ;  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  – касательные напряжения элементов структуры плоскостей  $xy, yz, zx$ ;  $u, v, w$  – перемещения элементов структуры по осям  $x, y, z$ ;  $\rho$  – плотность;  $G$  – модуль сдвига;  $\theta$  – остаточная температура;  $\alpha$  – коэффициент расширения;  $\nu$  – коэффициент Пуассона металлической среды;  $\eta$  – вязкость материала.

Системы уравнений (6)–(7) описывают трехмерное распределение напряжений и деформаций при заданном поле температур объекта. Уравнение (4) дополняет систему (6)–(7) и делает возможным неизоотермический расчет характеристик деформаций объекта. Система (8) описывает среду Гука (упругая среда), а система (9) – среду Максвелла (вязкоупругая среда). Системы (4)–(7) были расписаны в виде конечных разностей, что позволило предложить компьютерный вариант моделирования температур, деформаций и напряжений, реализованный на языке DELPHI.

В результате был разработан алгоритм вычисления полей напряжений в промышленном кокиле, применяемый на ОАО «ММЗ» для изготовления отливки «решетка» (рис. 1) (два варианта кокиля). Масса отливки – 46 кг, габаритные размеры – 740x400x80 мм, материал отливки – чугун СЧ20 следующего химического состава: С – 3,3–3,5%, Si – 1,4–2,4, Mn – 0,7–1,0, Ph – 0,2, Sh – 0,15%. Для изготовления отливки применяли кокиль с горизонтальной плоскостью разъема (рис. 2, а). С двух сторон кокиля расположены литниковые чаши. Одна чаша используется для заливки, вторая работает как выпор. При появлении сетки разгара на первой чаше назначение чаш меняется на противоположное. Для анализа влияния характера подвода металла на величину термических напряжений исследован также второй вариант подвода металла в полость формы (рис. 2, б). Распределение напряжений оценивали на двух вариантах кокиля, для сопоставления полученных результатов в обоих случаях задавали следующие технологические параметры литья, используемые на заводе: расплав – чугун марки СЧ20 заданного состава; температура заливки – 1351°C; начальная температура кокиля – 200°C; толщина слоя покрытия на рабочей поверхности кокиля – 1 мм; теплопроводность покрытия – 650 Вт/(см<sup>2</sup>·К).

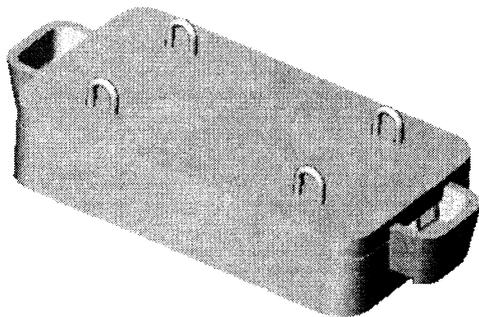


Вариант А

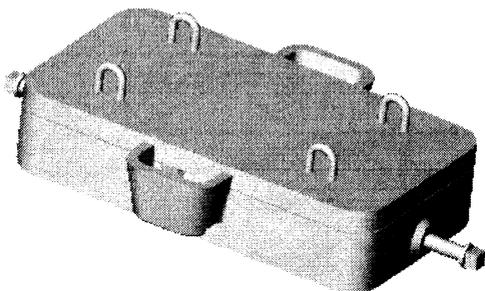
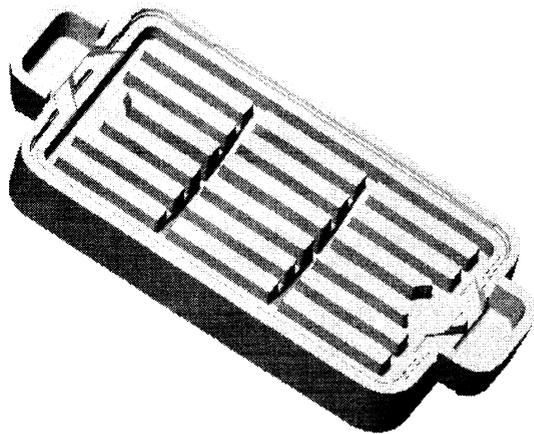


Вариант Б

Рис. 1. Внешний вид отливки, получаемой литьем в кокиль



*a*



*б*

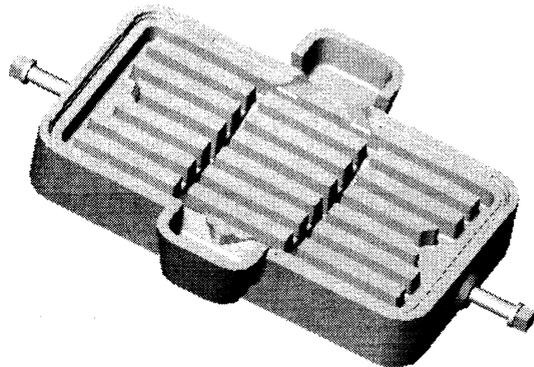


Рис. 2. Внешний вид кокилей А (*a*) и Б (*б*)

Весь объем кокиля был разбит на элементы с помощью пространственной равномерной сетки. В зависимости от положения в пространстве каждой клетке (форма, отливка, воздух, покрытие) присваивали соответствующие физические свойства (теплопроводность, теплоемкость, плотность и т.д.). Результаты моделирования напряжений в выделенных сечениях кокиля приведены на рис. 3, 4.

Анализ полученных данных по напряжениям свидетельствует о том, что наибольшие напряжения наблюдаются в нижней полуформе кокиля, в местах с наименьшей толщиной стенок. На рис. 5 показаны изменения напряжений в двух характерных точках кокиля варианта А и Б. Из рисунка

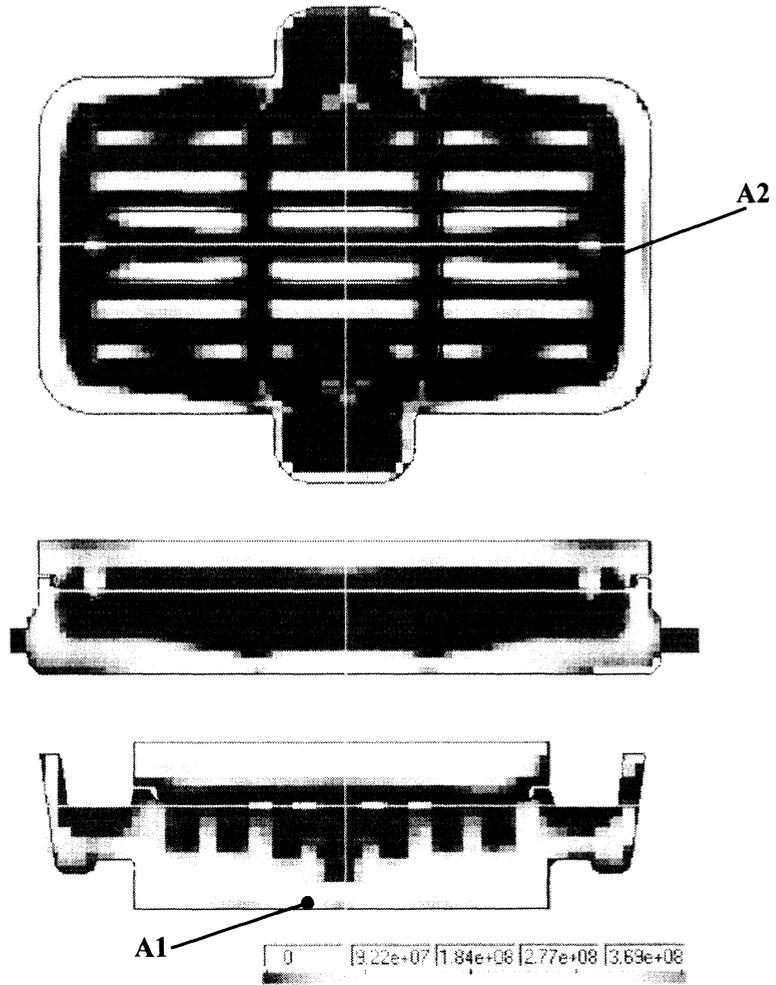


Рис. 3. Распределение напряжений в сечениях кокиля А и выделенные для анализа точки

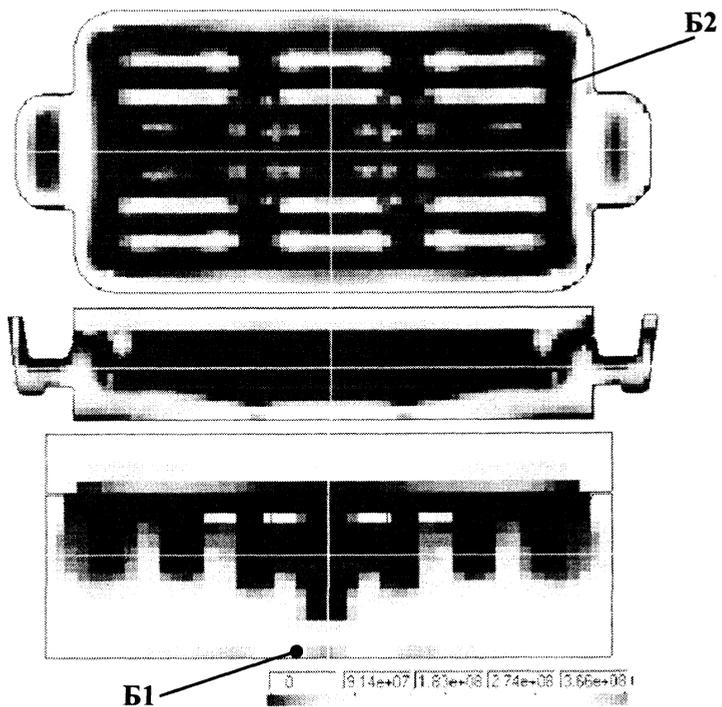


Рис. 4. Распределение напряжений в сечениях кокиля Б и выделенные для анализа точки

видно, что в отношении стойкости вариант кокиля Б более предпочтителен, так как в нем возникают меньшие термические напряжения как по величине, так и по времени.

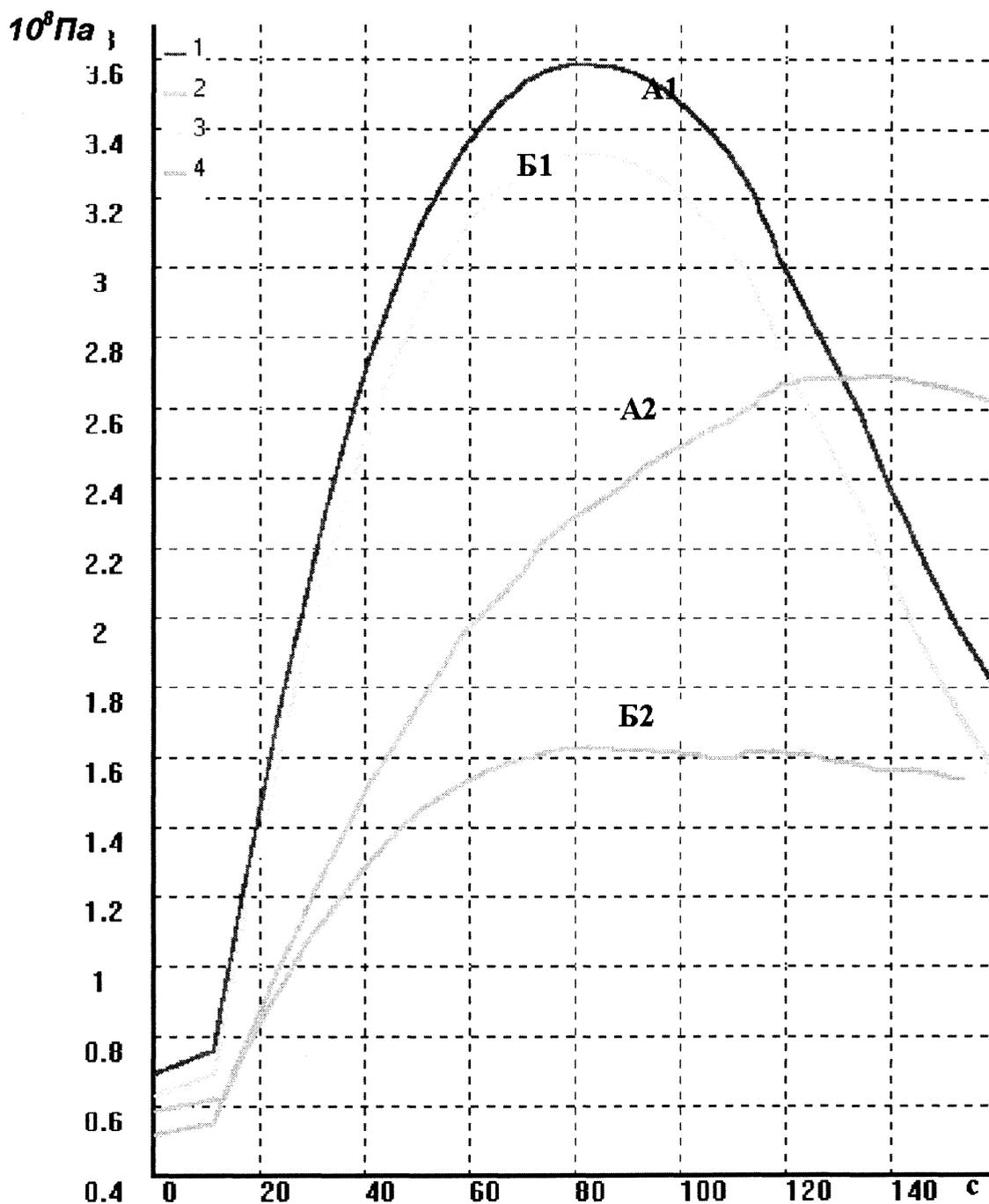


Рис. 5. Изменения напряжений в выделенных точках кокиля А и Б

Таким образом, выполненные исследования показали, что на основе математического моделирования виртуальных кокилей можно проводить исследование температур, напряжений и деформаций промышленных кокилей в зависимости от технологических факторов литья с учетом конструкции кокиля, что значительно повысит эффективность этого высокопроизводительного вида литья.

#### Литература

1. Чичко А.Н., Яцкевич Ю.В., Соболев В.Ф., Чичко О.И. Компьютерное моделирование в задачах термоупругости сложных пространственных деталей // Изв. вузов. Энергетика. 2003. №3. С. 68–74.
2. Chichko A., Yatskevich Y., Sobolev V. Three-dimensional computer modeling of alloys flow and foundry technology // Technologia 99. 6-th International conference. 1999. Bratislava. P. 672–675.
3. Боли Б., Уэнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964.