



In the article there is examined the question of application of the conformal images mathematical apparatus at calculations of solidification processes of casts and ingots. There is given the example of calculation of T-shaped casting in the presence of outer coolers.

Ю. А. САМОЙЛОВИЧ, НПП «Платан» (г. Екатеринбург),
В. И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ, БНТУ,
Н. В. АНДРИАНОВ, РУП «БМЗ»,
Г. А. КЛИМОВИЧ, БНТУ

УДК 669.18:621.746.047

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УПРОЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА ПРИ РАСЧЕТАХ ПРОЦЕССОВ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВОК СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Затвердевание и охлаждение отливок сопровождается объемными изменениями. Для большинства металлов и сплавов переход расплава в твердое состояние приводит к уменьшению удельного объема и возникновению в отливках пустот, называемых усадочными раковинами.

По мнению Б. Б. Гуляева [1], усадочная раковина – это концентрированная группа пустот (или одна пустота), образующаяся в результате перемещения макроскопических объемов расплава из одной части в другую, вызванного усадкой при охлаждении жидкого металла и его затвердевания.

Усадочная раковина обычно закрыта сверху слоем металла. Этот слой, а также объемы металла, разделяющие отдельные пустоты, называются «мостами». Часть отливки, в которой размещаются пустоты усадочной раковины вместе с мостами, называют областью усадочной раковины.

Основной способ борьбы с усадочными раковинами – соблюдение условий направленного затвердевания металла в литейной форме и установка прибылей, затвердевающих в последнюю очередь и питающих жидким металлом усадочные полости в отливке.

Согласно руководству [2] по проектированию оснастки литейных процессов, в работе [3] были показаны разновидности прибылей для отливок нескольких типичных форм (цилиндрических, прямоугольных, крестообразных). Металл должен затвердевать в отливке таким образом, чтобы фронт кристаллизации перемещался от периферии отливки к термическому центру, над которым размещается прибыль. Если питание отливки из прибыли затруднено, то образование усадочной раковины можно предотвратить, размещая у термического центра наружный холодильник, обладающий достаточно высокой теплоаккумулирующей способностью.

Учитывая разнообразие геометрических форм термических узлов в затвердевающих отливках, предлагается использовать упрощенные способы расчета затвердевания металла, полученные при квазистационарном подходе к решению задачи Стефана и представленные в [3].

В качестве примера выполнения подобных расчетов ниже представлены подробные выкладки при анализе устранения усадочной раковины в термическом узле T-образной формы (рис. 1). На рис. 2 показана схема сочленения стенок отливки и один из возможных вариантов размещения наружных холодильников.

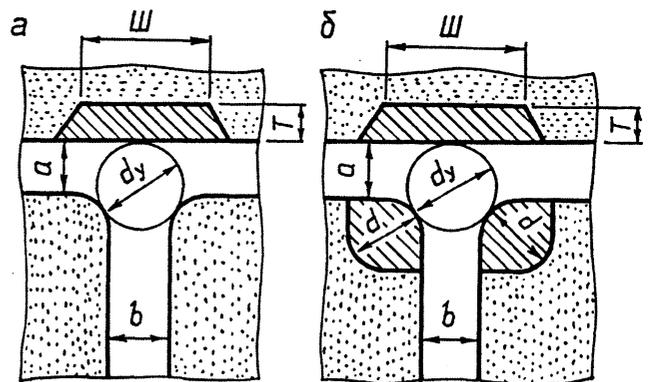


Рис. 1. Разновидности используемых наружных холодильников: а – при охлаждении T-образного узла пластинчатым холодильником; б – при охлаждении T-образного узла двумя фасонными и одним пластинчатым холодильником

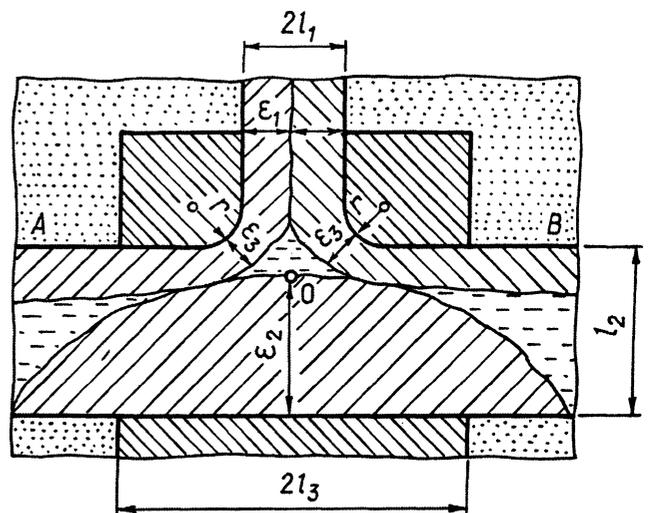


Рис. 2. Схема сочленения стенок T-образной отливки при наличии холодильников

В данном случае необходимо обеспечить от нижнего холодильника (шириной $2l_3$) такую скорость затвердевания металла, чтобы твердая корка толщиной ϵ_2 достигала уровня AB раньше, чем полностью затвердеет вертикальная стенка отливки толщиной $2l_1$.

Анализ возможности выполнения такого условия нуждается в проведении расчета затвердевания металла отливки для двух участков отливки – затвердевания вертикальной стенки толщиной $2l_1$ и намораживания металла от нижнего холодильника шириной $2l_3$. Однако предварительно нужно получить расчетное соотношение для учета граничного условия на охлаждаемой поверхности отливки (или наружного холодильника), для условий плотного теплового контакта указанной поверхности с внутренней поверхностью литейной формы.

Согласно А. И. Вейнику [4], теплоотдача с поверхности затвердевающей отливки при плотном тепловом контакте со стенкой литейной формы (граничное условие I рода) лимитируется теплоаккумулирующей способностью материала литейной формы. Для оценки расхода теплоты с поверхности отливки воспользуемся предложенным в [4] выражением для распределения температуры по сечению литейной формы:

$$T_2 = T_{2нач} + (T_n - T_{2нач}) \left(1 - \frac{x}{A}\right)^m, \quad (1)$$

где $T_{2нач}$ – средняя начальная температура стенки; T_n – температура на внутренней поверхности стенки; A – глубина прогрева стенки литейной формы; x – координата, отсчитываемая от плоской границы раздела поверхностей отливки и литейной формы; m – показатель степени, изменяющийся (судя по эмпирическим данным) в пределах 2 – 5.

Если принять площадь поверхности соприкосновения охлаждаемой части отливки с литейной формой равной $F = bl$, то расход теплоты через эту поверхность будет равен:

$$Q_n(t) = -\lambda_2 F \left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{m\lambda_2 bl}{A(t)} (T - T_{2нач}), \quad (2)$$

где T – температура; λ – коэффициент теплопроводности.

А. И. Вейник предложил для определения глубины прогрева стенки литейной формы соотношение в виде закона квадратного корня:

$$A = l \sqrt{2m(m+1) \frac{a_2}{a_1} \tau}, \quad (3)$$

где τ – критерий Фурье; a – коэффициент температуропроводности материала.

С другой стороны, расход теплоты с поверхности отливки определяется с учетом распределения температур по сечению затвердевшей корки металла:

$$T(x,t) = T_{кр} - (T_{кр} - T_n) \left(1 - \frac{y}{\epsilon}\right)^n, \quad (4)$$

где $T_{кр}$ – температура кристаллизации сплава; n – показатель, изменяющийся в пределах 1,05 – 1,3.

В простейшем случае при линейном распределении температуры по толщине твердой корки расход теплоты через выделенный участок поверхности отливки равен

$$Q_{отл}(t) = -\lambda_1 F \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{n\lambda_1 bl}{\epsilon(t)} (T_{кр} - T_n), \quad (5)$$

где $\epsilon(t)$ – толщина твердой корки металла к моменту времени t .

В частном случае намерзания плоской корки металла при неизменной температуре на ее внешней поверхности соблюдается известный закон квадратного корня [4]:

$$E(\tau) = 2\beta\sqrt{\tau}, \quad (6)$$

где

$$E = \frac{\epsilon}{l}; \quad \beta = \sqrt{\frac{K\Theta_n}{2 + K\Theta_n}}; \quad \Theta_n = \frac{T_{кр} - T_n}{T_{кр} - T_c}; \quad K = \frac{c_1(T_{кр} - T_n)}{L};$$

c , L – соответственно коэффициенты удельной теплоемкости, удельной теплоты плавления материала отливки.

Приравнявая расходы теплоты Q_n и $Q_{отл}$, получаем выражение для температуры на границе раздела поверхности отливки и стенки литейной формы (при $n = 1$):

$$T_n = \frac{mT_{2нач} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{A(t)}{\epsilon(t)} T_{кр}}{m + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{A(t)}{\epsilon(t)}}. \quad (7)$$

Используя выражения для глубины прогрева стенки литейной формы (3) и толщины намерзающего слоя металла (6), приведем выражение для температуры на поверхности раздела к виду

$$T_n = \frac{mT_{2нач} + \eta T_{кр} \sqrt{\frac{m(m+1)}{2K\Theta_n} (2 + K\Theta_n)}}{m + \eta \sqrt{\frac{m(m+1)}{2K\Theta_n} (2 + K\Theta_n)}}, \quad (8)$$

где

$$\eta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}; \quad (9)$$

a_1 и a_2 – выражения коэффициентов температуропроводности затвердевающего металла и материала стенки литейной формы.

Рассмотрим затвердевание чугуна в термическом узле T -образной формы (рис. 2), где приняты

следующие размеры элементов отливки: $2l_1 = 0,06$ м (толщина вертикальной стенки отливки); $l_2 = 0,04$ м (толщина горизонтальной полки отливки).

Теплофизические свойства чугуна отливки (доэвтектического состава) и материала сухой песчано-глинистой стенки формы примем равными [5]: $\lambda_1 = 41$ Вт/(м·К); $\lambda_2 = 0,715$ Вт/(м·К); $a_1 = 8,55 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $a_2 = 3,5 \cdot 10^{-7}$ м²/с; $c = c_1 = 725$ Дж/(кг·К); $L = 260$ кДж/кг; $T_{кр} = T_{эв} = 1403$ К.

Для материала холодильника (чугун при низкой температуре) примем $\lambda_2 = 55$ Вт/(м·К); $a_2 = 15 \cdot 10^{-6}$ м²/с.

Воспользуемся законом квадратного корня (6), приводя его к виду

$$\varepsilon_1 = 2\beta\sqrt{a_1 t},$$

где $\beta = \sqrt{\frac{K\Theta_n}{2 + K\Theta_n}}$.

Для определения температуры поверхности отливки T_n воспользуемся формулой (8), принимая $m = 2$:

$$T_n = \frac{2\beta T_{2нач} + \eta\sqrt{3} T_{кр}}{2\beta + \eta\sqrt{3}}. \quad (10)$$

Для принятых теплофизических характеристик металла и литейной формы найдем

$$\eta = \frac{41}{0,715} \left(\frac{3,5 \cdot 10^{-7}}{8,55 \cdot 10^{-6}} \right)^{\frac{1}{2}} = 11,6.$$

Коэффициент β зависит от определяемой температуры поверхности отливки, поэтому нахождение T_n по формуле (10) осуществляется методом последовательных приближений.

Полагая $T_{2нач} = 303$ К, подсчитаем критерий K :

$$K = \frac{c(T_{кр} - T_{2нач})}{L} = \frac{725(1403 - 303)}{260 \cdot 1000} = 3,067.$$

Примем в первом приближении $T_n^{(0)} = 1173$ К, тогда

$$\Theta_n^{(0)} = \frac{1403 - 1173}{1403 - 303} = 0,2901,$$

$$\beta^{(0)} = \sqrt{\frac{3,067 \cdot 0,2901}{2 + 3,067 \cdot 0,2901}} = 0,4927,$$

$$T_n^{(1)} = \frac{2 \cdot 0,4927 \cdot 303 + 11,6 \cdot \sqrt{3} \cdot 1403}{2 \cdot 0,4927 + 11,6 \cdot \sqrt{3}} = 1351,6 \text{ К.}$$

Повторим вычисления:

$$\Theta_n^{(1)} = \frac{1403 - 1351,6}{1403 - 303} = 0,04675,$$

$$\beta^{(1)} = \sqrt{\frac{3,067 \cdot 0,04675}{2 + 3,067 \cdot 0,04675}} = 0,2667,$$

$$T_n^{(2)} = \frac{2 \cdot 0,2667 \cdot 303 + 11,6 \cdot \sqrt{3} \cdot 1403}{2 \cdot 0,2667 + 11,6 \cdot \sqrt{3}} = 1374,5 \text{ К.}$$

После дополнительных последовательных приближений получаем окончательно:

$$T_n \cong 1388 \text{ К}, \quad \beta \cong 0,17.$$

Теперь определим продолжительность затвердевания вертикальной стойки толщиной $2l_1 = 0,06$ м, остывающей в сухой песчано-глинистой форме:

$$t_k = \frac{1}{a_1} \left(\frac{l_1}{2\beta} \right)^2 = \frac{1}{8,55 \cdot 10^{-6}} \left(\frac{0,03}{2 \cdot 0,17} \right)^2 = 911 \text{ с.}$$

Для плоского наружного холодильника, плоскость контакта которого с отливкой совпадает с плоскостью внутренней поверхности стенки литейной формы (рис. 3), намерзающая твердая корка имеет форму «гриба», причем динамика намораживания определяется решением задачи, полученным методом конформных отображений:

$$\frac{2K\Theta_n \tau}{2 + K\Theta_n} = \frac{1}{8} [1 + \text{ch} \pi \xi (\pi \xi - 1)], \quad (11)$$

где параметр ξ связан с толщиной твердой корки ε_2 соотношением:

$$\varepsilon_2(t) = l_3 \text{sh} \frac{\pi}{2} \xi(t). \quad (12)$$

Приведенные соотношения (11), (12) соответствуют случаю намораживания твердой корки на внешней поверхности эллипса, когда одна из осей эллипса (l_2) равна нулю [3].

В последующих расчетах используется допущение о выборе ширины холодильника, равной $2l_3 = 3 \cdot 2l_1 = 3 \cdot 0,06 = 0,18$ м.

Подсчитаем температуру поверхности отливки на границе с холодильником, исходя из предположения о том, что толщина холодильника превышает толщину горизонтальной полки отливки l_2 .

В этом случае имеются основания считать холодильник полуограниченным телом и использовать при расчете T_n формулы (8) и (9).

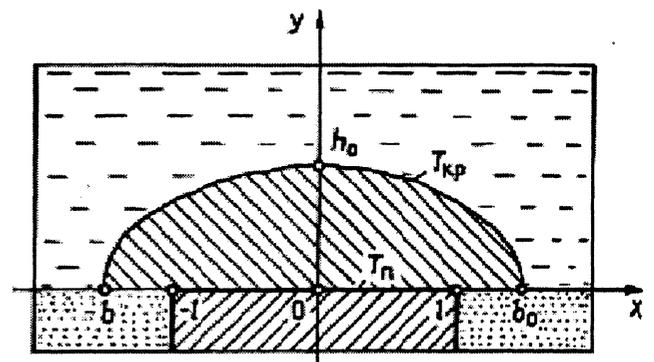


Рис. 3. Формирование твердой корки в виде «гриба» у поверхности холодильника

Используя указанные выше теплофизические свойства чугуна, получаем:

$$\eta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} = \frac{41}{55} \sqrt{\frac{15}{8,55}} \approx 0,987.$$

Примем $\eta = 1$ и определим температуру поверхности отливки на границе с наружным холодильником. В первом приближении примем $T_n^{(0)} = 973$ К:

$$\Theta_n^{(0)} = \frac{1403 - 973}{1403 - 303} = 0,3909,$$

$$\beta = \sqrt{\frac{3,067 \cdot 0,3909}{2 + 3,067 \cdot 0,3909}} = 0,6122,$$

$$T_n^{(1)} = \frac{2 \cdot 0,6122 + \sqrt{3} \cdot 1403}{2 \cdot 0,6122 + \sqrt{3}} = 947,4 \text{ К.}$$

Повторим вычисления:

$$\Theta_n^{(1)} = \frac{1403 - 947,4}{1403 - 303} = 0,4142,$$

$$\beta^{(1)} = \sqrt{\frac{3,067 \cdot 0,4142}{2 + 3,067 \cdot 0,4142}} = 0,6233,$$

$$T_n^{(2)} = \frac{2 \cdot 0,6233 \cdot 303 + \sqrt{3} \cdot 1403}{2 \cdot 0,6233 + \sqrt{3}} = 942,6 \text{ К,}$$

примем $\beta = 0,63$; $T_n = 933$ К и подсчитаем комплекс

$$\Theta_n = \frac{1403 - 933}{1403 - 303} \approx 0,4273.$$

При этом множитель $\frac{2K\Theta_n}{2 + K\Theta_n}$ будет равен (при $K = 3,067$):

$$\frac{2K\Theta_n}{2 + K\Theta_n} = \frac{2 \cdot 3,067 \cdot 0,4273}{2 + 3,067 \cdot 0,4273} = 0,792.$$

Критерий Фурье в решении (11) подсчитывается с учетом ширины холодильника $2l_3$ при заданном $l_3 = 0,09$ м:

$$\tau = \frac{8,55 \cdot 10^{-6} t}{(0,09)^2} = 1,056 \cdot 10^{-3} t,$$

где t — время.

В связи с этим левая часть решения (11) равна:

$$\frac{2K\Theta_n \tau}{2 + K\Theta_n} = 0,792 \cdot 1,056 \cdot 10^{-3} t = 0,8364 \cdot 10^{-3} t.$$

Правая часть решения (11) стремится к некоторому предельному значению (0,125), которому соответствует значение параметра $\xi = 1/\pi$.

С другой стороны, из соотношения (12) можно найти толщину твердой корки, намерзающей на холодильнике:

$$\varepsilon_2 = l_3 \text{sh}(0,5) = 0,09 \cdot 0,5211 = 0,0469 \text{ м.}$$

Из равенства

$$\frac{2K\Theta_n \tau}{2 + K\Theta_n} = 0,125 = 0,8364 \cdot 10^{-3} t$$

рассчитываем время, соответствующее достижению предельной толщины твердой корки:

$$t = t_k = \frac{0,125}{0,8364} \cdot 10^3 = 149,5 \text{ с.}$$

В то же время при расчете затвердевания вертикальной стойки было определено время полного затвердевания металла, равное $t_k = 911$ с. Таким образом, со стороны нижнего холодильника за 150 с намерзает твердая корка толщиной 0,047 м, что превышает толщину горизонтальной стойки отливки (0,04 м).

Проведенные расчеты подтверждают эффективность ускоряющего процесс затвердевания отливки наружного холодильника для принятых значений геометрических и теплофизических параметров холодильника.

При возможном размещении прибыли на вертикальной стойке отливки продолжительность затвердевания металла в сечении вертикальной стойки (около 900 с) значительно превышает длительность промерзания горизонтальной стойки под влиянием наружного холодильника (около 150 с), что обеспечивает возможность подпитки жидким металлом усадки в термическом центре отливки на всем протяжении процесса затвердевания термического узла.

В заключение отметим, что размещение дополнительных наружных холодильников у вертикальной стенки отливки (см. рис. 2) может затруднить условия питания (из прибыли) усадочной раковины в термическом центре отливки. В связи с этим для принятых в данном примере геометрических параметров отливки достаточно использования одного наружного холодильника, размещенного под горизонтальной полкой отливки.

Литература

1. Гуляев Б. Б. Литейные процессы. М.; Л.: Машгиз, 1960.
2. Руссиян С. В., Баранов И. А., Голованов Н. Н. Проектирование технологических процессов литейного производства. М.: Машгиз, 1951.
3. Самойлович Ю. А., Тимошпольский В. И., Климович Г. А. Использование упрощенных решений задачи Стефана при проектировании оснастки литейных процессов // Литье и металлургия. 2002. № 4. С. 154 – 162.
4. Вейник А. И. Теория затвердевания отливки. М.: Машгиз, 1960.
5. Анисович Г. А., Жмакин Н. П. Охлаждение отливки в комбинированной форме. М.: Машиностроение, 1969.