



For the first time in the theory of counterflow heat exchange there is solved the problem of heating of the two-dimensional prismatic slug at its heating by convection current. There are studied the regularities of dynamics of the (gas) and metal heat carrier temperatures depending on different parameters.

*Ю. С. ПОСТОЛЬНИК, Днепродзержинский государственный технический университет,
В. И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ, Белорусский национальный технический университет,
О. А. ЧЕРНЫЙ, Днепродзержинский государственный технический университет,
Д. Н. АНДРИАНОВ, ГГТУ им. П. О. Сухого, В. И. ЩЕРБАКОВ, РУП «БМЗ»*

УДК 669.046:536.12:518.61

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРОЦЕССА НАГРЕВА ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СЛИТКОВ И ЗАГОТОВОК В РЕЖИМЕ ПРОТИВОТОКА

В металлургической промышленности мира и стран СНГ в последние два-три десятилетия широко внедрились методические печи с шагающим подом и шагающими балками, обладающие существенными преимуществами по сравнению с нагревательными печами толкательного типа, ролевыми, кольцевыми и др., а именно: нагрев металла с зазором при регулировании его в зависимости от темпа нагрева; компактность самого агрегата при высокой производительности; исключение свариваемости заготовок и, как следствие, получение поверхностных дефектов; более равномерный нагрев металла; низкий угар металла и т. д. Эти преимущества определяют эффективность тепловой работы печей с шагающими балками и шагающим подом, а также возможность нагрева в них специальных видов марок сталей и сплавов, к качеству которых предъявляются повышенные требования.

С технологической точки зрения слитки и заготовки при нагреве в проходных методических печах последовательно проходят три зоны печи: методическую (зону предварительного подогрева), сварочную (нагревательную) и томильную (зону выдержки).

Как правило, сварочная и томильная зоны являются отапливаемыми, температура печи по длине этих зон изменяется незначительно. В методической зоне, которая фактически неотапливаемая, начинается нагрев заготовок, который осуществляется путем теплообмена с потоком отходящих газов, движущихся навстречу.

Таким образом, при организации работы методических печей необходимо проводить тепловые расчеты для каждой зоны отдельно. При моделировании процесса нагрева в сварочной и томильной зонах температура теплоносителя обычно принимается постоянной и далее в зависимости от граничных условий решается соответствующая краевая задача теплопроводности. Для методической зоны такое допущение крайне неприемлемо, так как может привести к значительным погреш-

ностям, поскольку именно в этой зоне осуществляется идея теоретического противотока, когда температура металла возрастает, а температура греющей среды постепенно снижается. При этом температура дымовых газов на входе металла в методическую зону составляет 600–800°C, а на выходе из нее – 1100–1300°C. В связи с этим при математическом моделировании тепловой работы методической зоны печи возникают определенные трудности, обусловленные тем, что в начальный период расчета состояние греющих газов и металла приходится определять на разных краях печи.

Следовательно, возникает необходимость в решении противоточной краевой задачи при нагреве слитков и заготовок в методических печах. Впервые аналитические решения задачи нестационарной теплопроводности в противоточном теплообмене конвекцией для термически массивных тел простой формы (плиты, цилиндра и шара) приведены в работе Э.М. Гольдфарба [1]. А.В. Кавадеровым поставлена и решена задача противоточного теплообмена излучением для массивной пластины [2], при этом решение построено на двух вспомогательных функциях, определяемых специальными таблицами, составленными с помощью гидростатического интегратора системы Д.В. Будрина. В последних работах, посвященных исследованию теоретического теплообмена, получены приближенные аналитические решения при нагреве термически массивных тел простой формы с учетом нелинейностей I и II рода [3–5], основанные на использовании метода эквивалентных источников, а также численные решения исходной задачи [6–8].

Вместе с тем, учитывая расположение нагреваемых заготовок в печах с шагающими балками и шагающим подом с зазором, представляет несомненный интерес учет реальной геометрии нагреваемых изделий в противоточном режиме, что позволит повысить точность полученных результатов.

В данной работе впервые в теории противоточного теплообмена сделана попытка решения задачи нагрева прямоугольной призмы.

При формулировке математической модели примем ряд следующих допущений [8]:

1) температура металла, футеровки и дымовых газов по ширине печи постоянна (переменна только по длине печи);

2) нагрев металла является симметричным и осуществляется путем конвективного теплообмена;

3) состав продуктов сгорания и их объем не зависят от температуры;

4) коэффициент теплопроводности, температуропроводности, теплоемкость дымовых газов и металла также не зависят от температуры;

5) аэродинамикой дымовых газов, которые существенно влияют на тепловую работу печи, будем пренебрегать.

Рассмотрим процесс конвективного нагрева длинной квадратной призмы сечением $2H \times 2H$ с начальной температурой T_0 . Математическая модель имеет вид

$$a \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right] = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad T(x_1, x_2, \tau_0) = T_0, \quad (1)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \Big|_{x_i=H} = \alpha [T_r(t) - T(x_1, x_2, t)] \Big|_{x_i=H}, \quad \frac{\partial T}{\partial x_i} \Big|_{x_i=0} = 0, \quad (2)$$

$$V_r c_r \frac{\partial T_r}{\partial t} = \alpha(t) [T_r(t) - \bar{T}_n(t)] 2A, \quad (3)$$

$$\bar{T}_n(t) = \frac{1}{H} \int_0^H T_{ni}(x_j, t) dx_j,$$

$$T(x_1, x_2, t_0) = T' = T_0 = \text{const}, \quad T_r(\tau_0) = T_r'' = \text{const}, \quad (4)$$

где $A = 2LH$ — площадь боковой стороны поверхности призмы; L — ее длина; T' , T_r'' — температура тела на входе и газа на выходе из методической зоны; выражение (3) — условие теплового баланса в интегральной форме, где $\bar{T}_n(t)$ — среднеинтегральная по периметру температура поверхности; $\alpha(t)$ — изменяющийся во времени приведенный коэффициент теплоотдачи.

Переходя к безразмерным величинам

$$\theta(\xi_1, \xi_2, \tau) = \frac{T(x_1, x_2, t) - T_0}{T_r'' - T_0}, \quad \xi_1 = \frac{x_1}{H_1}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{H_2}, \quad \tau = \frac{at}{H_1^2}, \quad (5)$$

$$Bi = \frac{\alpha H}{\lambda}, \quad W = 2w = 2Vc / (V_r c_r) = \frac{2AHC}{V_r c_r} = \frac{2H2HLc}{V_r c_r},$$

получаем

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi_2^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad \theta(\xi_1, \xi_2, 0) = \theta_0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi_i=1} = Bi(\tau) [\theta_r(\tau) - \theta(\xi_1, \xi_2, \tau)] \Big|_{\xi_i=1}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi_i=0} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta_r}{\partial \tau} = Bi(\tau) [\theta_r(\tau) - \bar{\theta}_n(\tau)] W, \quad \bar{\theta}_n(\tau) = \int_0^1 \theta_{ni}(\xi_j, \tau) d\xi_j, \quad (8)$$

$$\theta(\xi_1, \xi_2, \tau_0) = \theta' = \theta_0 = 0, \quad \theta_r(\tau_0) = \theta_r'' = 1. \quad (9)$$

На сегодняшний день существует множество различных (численных, аналоговых, аналитических) методов решения краевых задач теплопроводности [8–11]. Среди них особое практическое внимание привлекают приближенные аналитические методы термического слоя, расчленяющие единый (по Фурье) процесс нагрева холодного тела на два этапа: инерционный и упорядоченный. На инерционном этапе ($0 \leq \tau \leq \tau_0$) осуществляется прогрев тела, а на упорядоченном ($\tau \geq \tau_0$) уже происходит его нагрев по всему сечению.

Учитывая быстротечность первого (инерционного) этапа, будем рассматривать второй (упорядоченный) этап нагрева. В соответствии с этим в математической модели (6)–(9) начальные условия заменим следующими:

$$\theta_2(\xi_1, \xi_2, \tau) \Big|_{\xi_1=0; \xi_2=0} = \theta_u(\tau_0) = 0, \quad \theta_r(\tau_0) = \theta_r'' = 1. \quad (10)$$

Продолжительность прогрева призмы τ_0 можно определить по формуле

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{1}{\tau_{01}} + \frac{1}{\tau_{02}} \quad \text{или} \quad \tau_0 = \frac{\tau_{01} \tau_{02}}{\tau_{01} + \tau_{02}}, \quad (11)$$

где $\tau_{0i} = \frac{1}{6}$ — время симметричного прогрева

неограниченной пластины толщиной $2H$. Для квадратной призмы формула (11) дает $\tau_0 = 0,083$.

Для решения задачи на регулярном этапе используем метод эквивалентных источников Постольника (МЭИ) [12], который обеспечивает достаточную адекватность результатов расчета, а решение дает в явной аналитической форме, что необходимо для дальнейшего расчета температурных напряжений.

Принимая за главное направление ξ_1 , запишем разрешающее уравнение МЭИ в виде:

$$\frac{\partial^2 \theta_{21}}{\partial \xi_1^2} + f_{21}(\xi_2, \tau) = f_2(\tau), \quad (12)$$

где «эквивалентные источники» определяются интегральными условиями:

$$f_2(\tau) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \theta_{21}}{\partial \tau} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{d}{d\tau} \int_0^1 \int_0^1 \theta_{21} d\xi_1 d\xi_2, \quad (13)$$

$$f_{22}(\tau) = \int_0^1 \frac{\partial^2 \theta_{21}}{\partial \xi_2^2} d\xi_1. \quad (14)$$

Интегрируя уравнение (12) дважды по ξ_1 и используя граничные (7) и интегральные (14) условия, находим

$$\theta_{21}(\xi_1, \xi_2, \tau) = \theta_r(\tau) - \frac{f_2(\tau)}{2} \left[1 - \frac{\text{Bi}(\tau) \text{ch}(\mu(\tau) \xi_2)}{\Phi(\tau)} \right] \times \left[\frac{2 + \text{Bi}(\tau)}{\text{Bi}(\tau)} - \xi_1^2 \right], \quad (15)$$

где

$$\Phi(\tau) = \text{Bi}(\tau) \text{ch}(\mu(\tau)) + \mu(\tau) \text{sh}(\mu(\tau)); \quad (16)$$

$$\mu(\tau) = \sqrt{\frac{3\text{Bi}(\tau)}{3 + \text{Bi}(\tau)}}.$$

Для всесторонне симметрично нагреваемой призмы квадратного сечения координатные направления абсолютно тождественны. В полученном же решении (15) зависимость температурной функции от координат ξ_1 и ξ_2 не идентична. Для устранения этого несогласования повторим изложенную процедуру решения, приняв за главное направление ξ_2 . Очевидно, получим новое решение, подобное (15), со сменой координат:

$$\theta_{22}(\xi_1, \xi_2, \tau) = \theta_r(\tau) - \frac{f_2(\tau)}{2} \left[1 - \frac{\text{Bi}(\tau) \text{ch}(\mu(\tau) \xi_1)}{\Phi(\tau)} \right] \times \left[\frac{2 + \text{Bi}(\tau)}{\text{Bi}(\tau)} - \xi_2^2 \right]. \quad (17)$$

За окончательную функцию распределения примем среднеарифметическое решений (15) и (17)

$$\theta_2(\xi_1, \xi_2, \tau) = \theta_r(\tau) - \frac{f_2(\tau)}{2} \left[\left[\frac{2 + \text{Bi}(\tau)}{\text{Bi}(\tau)} - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2} \right] - \frac{\text{Bi}(\tau)}{2\Phi(\tau)} \left[\frac{(2 + \text{Bi}(\tau)) [\text{ch}(\mu(\tau) \xi_1) + \text{ch}(\mu(\tau) \xi_2)]}{\text{Bi}(\tau)} - \xi_1^2 \text{ch}(\mu(\tau) \xi_2) + \xi_2^2 \text{ch}(\mu(\tau) \xi_1) \right] \right]. \quad (18)$$

Для определения "источника" $f_2(\tau)$ имеем интегральное условие (13), которое после подстановки функции (18) приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{d\tau} (f_2(\tau) M(\tau)) + f_2(\tau) = \frac{d}{d\tau} \theta_r(\tau), \quad (19)$$

где

$$M(\tau) = \frac{1}{\mu^2(\tau)} - \frac{(6 + 2\text{Bi}(\tau)) \text{sh}(\mu(\tau))}{6\mu(\tau)\Phi(\tau)}. \quad (20)$$

Приравнявая (20) и (8), имеем

$$\frac{d}{d\tau} (f_2(\tau) M(\tau)) + f_2(\tau) = f_2(\tau) \Psi(\tau). \quad (21)$$

Здесь

$$\Psi(\tau) = \frac{\text{Bi}(\tau) W}{2} \left[\frac{(6 + \text{Bi}(\tau))}{3\text{Bi}(\tau)} - \frac{\mu(\tau) \text{ch}(\mu(\tau)) (5 + 3\text{Bi}(\tau)) + 6\text{sh}(\mu(\tau))}{6\mu(\tau) [\text{Bi}(\tau) \text{ch}(\mu(\tau)) + \mu(\tau) \text{sh}(\mu(\tau))]} \right]. \quad (22)$$

Полагая в решении (18) $\tau = \tau_0$ и используя начальные условия (10), находим начальное значение функции $f_2(\tau)$:

$$f_2(\tau_0) = f_2^0 = \frac{2\text{Bi}(\tau_0) [\text{Bi}(\tau_0) \text{ch}(\mu(\tau_0)) + \mu(\tau_0) \text{sh}(\mu(\tau_0))]}{(2 + \text{Bi}(\tau_0)) [\text{Bi}(\tau_0) \text{ch}(\mu(\tau_0)) + \mu(\tau_0) \text{sh}(\mu(\tau_0))] - \text{Bi}(\tau_0)}. \quad (23)$$

Тогда решение уравнения (19) представим в виде

$$f_2(\tau) = f_2^0 \exp \left[- \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d}{d\eta} \frac{M(\eta) + 1 - \Psi(\eta)}{M(\eta)} d\eta \right]. \quad (24)$$

Температура газа определяется условием теплового баланса (8) или уравнением (19), что приводит к выражению

$$\theta_r(\tau) = 1 + \int_{\tau_0}^{\tau} f_2(\eta) \Psi(\eta) d\eta. \quad (25)$$

С использованием полученного решения противоточного теплообмена проведены расчеты конкретных примеров нагрева призмы, при этом рассмотрен нагрев квадратной заготовки размером 0,2x0,2 м как наиболее часто встречающегося типоразмера среднесортных заготовок, разливаемых на современных МНЛЗ. Коэффициент теплоотдачи брали в виде функции

$$\alpha(\tau) = -8,03865 + 15,5 \exp \left(\frac{T_n(\tau)}{516,464} \right), \quad \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$$

(рис. 1, а), где температура поверхности $T_n(\tau)$ аппроксимировалась по решению задачи противоточного конвективного нагрева пластины толщиной $H = 0,2$ м следующей функцией:

$$T_n(\tau) = \left(0,92495 - 0,66237 \exp \left(\frac{-\tau}{0,27702} \right) \right) T_r'', \quad \text{К},$$

$T_r'' = 1000$ К, $W = 1$. Результаты расчетов приведены на рис. 1, б, из которого видно, что взаимное изменение температур в характерных точках сечения призмы соответствует общим представлениям о сходящемся процессе противоточного нагрева.

На последующем этапе проведены расчеты с целью установления влияния того или иного параметра на динамику противоточного нагрева,

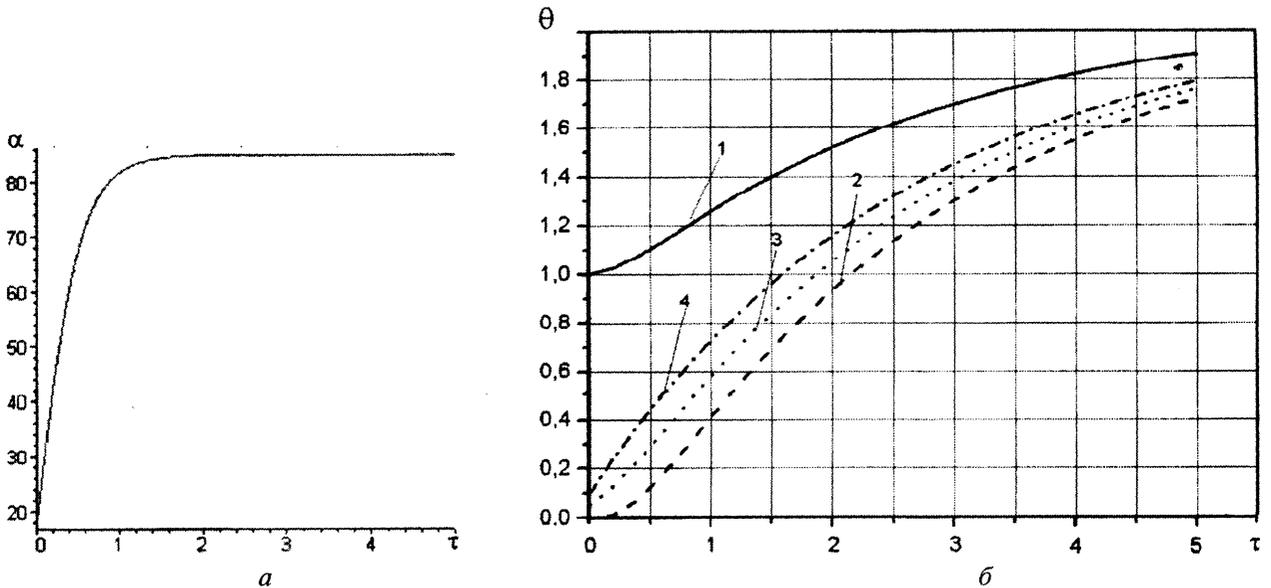


Рис. 1. Изменение во времени коэффициента теплоотдачи α , $\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$ (а) и температурных функций газа и призматической заготовки (б) в характерных точках сечения: 1 – газ; 2 – центр; 3 – середина боковой поверхности; 4 – ребро

что представляет интерес для инженерной практики. С этой целью вначале было выяснено, как влияет на процесс нагрева изменение отношения $W = V_c / (V_r c_r)$, причем расчеты проводили как для постоянного приведенного коэффициента теплоотдачи $\alpha = 200 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$, так и для коэффициента теплоотдачи, изменяющегося в соответствии

$$\text{с функцией } \alpha(\tau) = -8,03865 + 42,5 \exp\left(\frac{T_n}{580,464}\right), \text{ Вт}/$$

$(\text{м}^2\cdot\text{К})$. Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 2–4. Из рис. 2 видно, что с увеличением отношения водяных чисел W (от 0,5 до 1,5) характер температуры теплоносителя и металла изменяется достаточно существенно. При $W = 0,5$ кривая θ имеет более пологий характер, при этом температура металла (ребра заготовки) θ_p к концу нагрева ($\tau = 5$) асимптотически приближается к температуре газа. При $W = 1,5$ наблюдается быстрое нарастание температуры газа и температуры металла, но, тем не менее, перепад между температурой самой горячей точки призматической заготовки (ребра) и температурой газа уменьшается достаточно медленно и составляет к окончанию нагрева $\Delta\theta = 0,2$ ($\tau = 5$) при начальном значении перепада $\Delta\theta = 0,5$. То же можно отметить при анализе динамики температурного перепада по сечению заготовки. Аналогичная качественная картина имеет место при изменении величины отношения водяных чисел в случае переменного во времени коэффициента теплоотдачи α в соответствии с кривой, показанной на рис. 3. Хотя при задании $\alpha = 200 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$ (см., например, рис. 2, а) в начальный момент времени ($\tau=0-1$) имеет место большой перепад между ребром и центром заготовки, чем при задании $\alpha(\tau) = \text{in var}(\tau)$ (рис. 4, а), к окончанию нагрева

($\tau = 5$) температуры газа и металла практически одинаковы. Данное обстоятельство легко объяснить, поскольку в начальный момент времени при $\alpha(\tau) = \text{in var}(\tau)$ значение коэффициента теплоотдачи находится на уровне 60–100 $\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$.

На рис. 5 представлена динамика температур газа и металла во времени при постоянном значении отношения водяных чисел $W = 0,3$ в зависимости от величины стационарного коэффициента теплоотдачи и соответственно от величины Bi . Из приведенных данных следует, что с увеличением α (критерия Bi) температура металла повышается и проявляется тенденция к ее более быстрому росту во времени, и, несмотря на больший перепад между температурами в характерных точках сечения заготовки в начальный момент времени, выравнивание температур по сечению металла происходит значительно быстрее.

Изменение температур газа и металла при том же значении отношения $W = 0,3$, но при задании изменения коэффициента внешнего теплообмена α во времени приведено на рис. 6. Из рисунка видно, что в случае нагрева металла при возрастающем в процессе нагрева значении α имеет место значительно меньший температурный перепад по сечению заготовки в начале регулярного этапа и более монотонный рост температур металла при нагреве, что в конечном итоге должно привести к снижению уровня термических напряжений, особенно в начальный момент времени.

Приведенные рис. 1–6 иллюстрируют изменение температур теплоносителя (газа) и металла (заготовки) в наиболее характерных точках ее сечения. Вместе с этим представляет интерес расчет распределения температур по сечению заготовки в момент возникновения в ней максимального температурного перепада. Для этого осу-

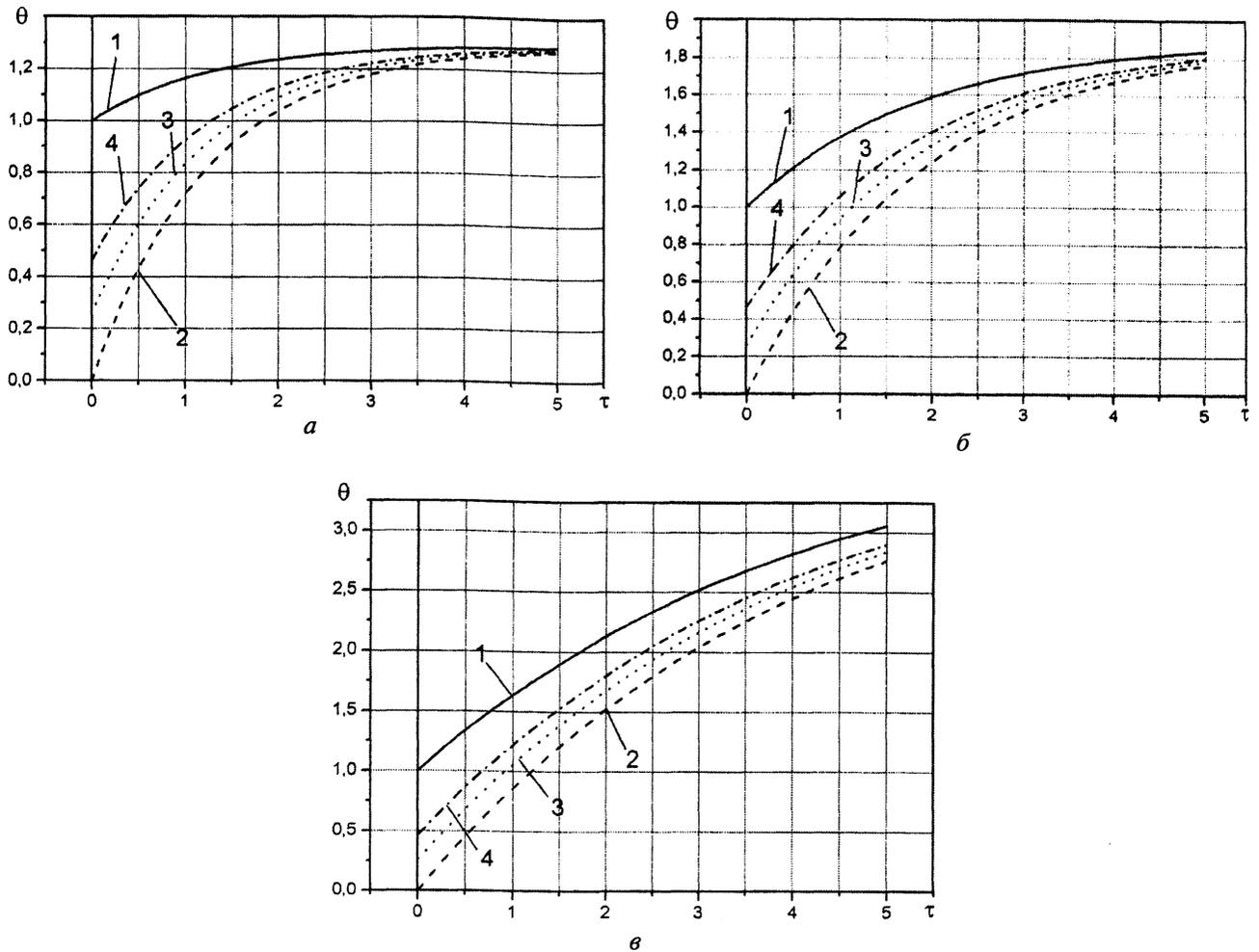


Рис. 2. Динамика температур газа (1) и температур в характерных точках сечения призматической заготовки (2 – центр; 3 – середина боковой поверхности; 4 – ребро) при стационарном коэффициенте теплоотдачи $\alpha = 200 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ и различных значениях отношения водяных чисел W : а – $W = 0,5$; б – $1,0$; в – $1,5$

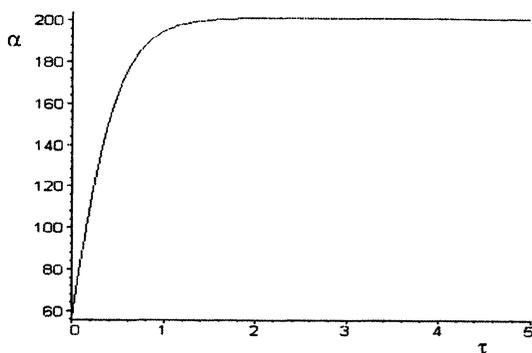


Рис. 3. Изменение во времени коэффициента теплоотдачи α , $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$

существлен расчет нагрева квадратной (призматической) заготовки поперечным сечением $0,2 \times 0,2 \text{ м}$, длиной 5 м . Теплоемкость металла приняли $c_m = 670 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, коэффициент теплопроводности $\lambda = 60 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, коэффициент температуропроводности $a = 0,025 \text{ м}^2/\text{с}$, теплоемкость газа

$\bar{c}_r = 1466 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, удельный расход топлива $b = 0,045 \text{ кг}/\text{кг}$. Реальная теплоемкость газа $c_r = \bar{c}_r b = 1466 \cdot 0,045 = 65,97 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, объем газа $V = 8 \text{ м}^3$. Тогда по выражению (5) $W \cong 1$. Для простоты примем стационарный коэффициент теплоотдачи $\alpha = 200 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Температура тела на входе $T' = 300 \text{ К}$, температура газа на выходе из методической зоны (по ходу движения металла) $T'' = 1500 \text{ К}$. Вначале по выражению (11) для квадратной призмы определим $\tau_0 = 0,083$ или $t = 0,133 \text{ ч}$. Далее по выражениям (18)–(25) вычислим значения тепловой функции в характерных точках сечения призмы и температуру дымовых газов. Результаты расчетов температурного поля по сечению квадратной заготовки и поля температур газа в начале упорядоченного (регулярного) этапа представлены на рис. 7.

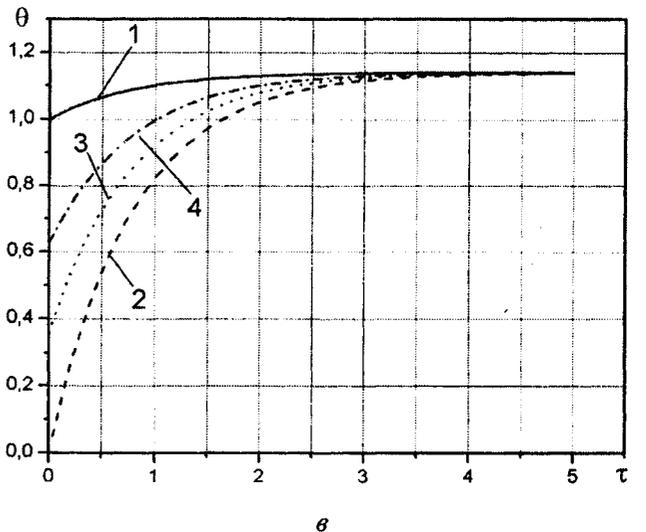
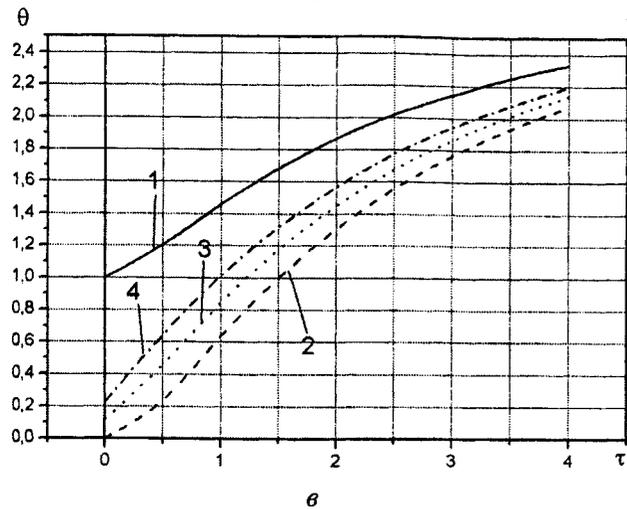
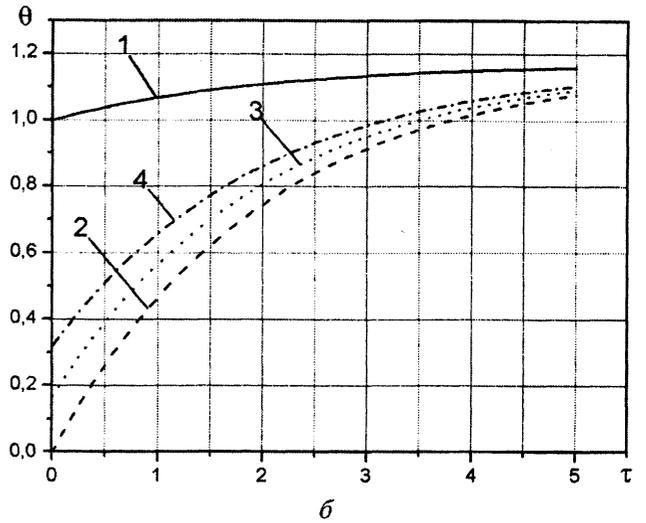
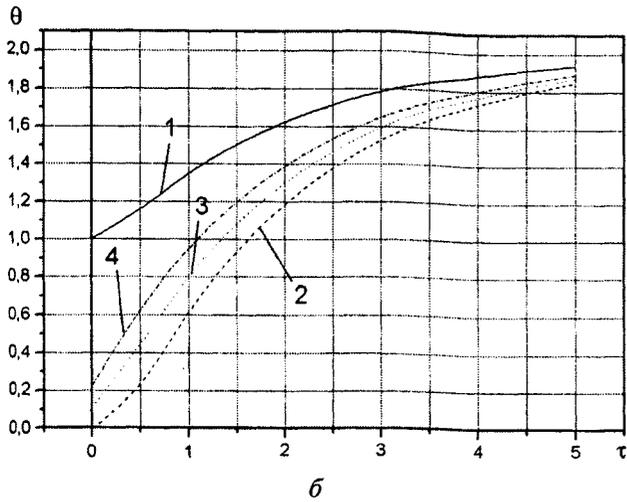
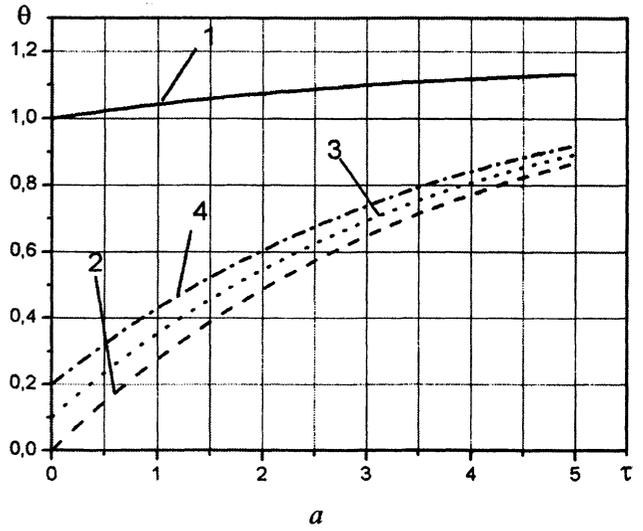
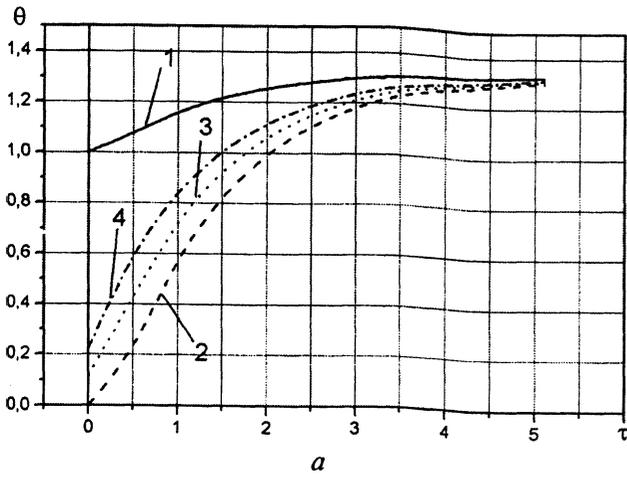


Рис. 4. Динамика температур газа (1) и температур в характерных точках сечения призматической заготовки (2 – центр; 3 – середина боковой поверхности; 4 – ребро) при изменяющемся коэффициенте теплоотдачи α (в соответствии с кривой на рис. 3) и различных значениях отношения водяных чисел W : а – $W = 0,5$; б – $1,0$; в – $1,25$

Рис. 5. Динамика температур газа (1) и температур в характерных точках сечения призматической заготовки (2 – центр; 3 – середина боковой поверхности; 4 – ребро) при значении отношения водяных чисел $W = 0,3$ для различных значений стационарного коэффициента теплоотдачи α : а – $\alpha = 50 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$; б – 100 ; в – 300

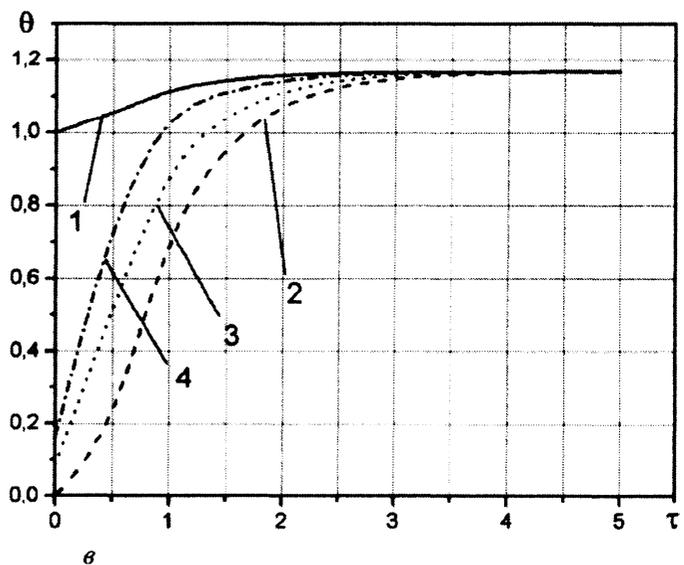
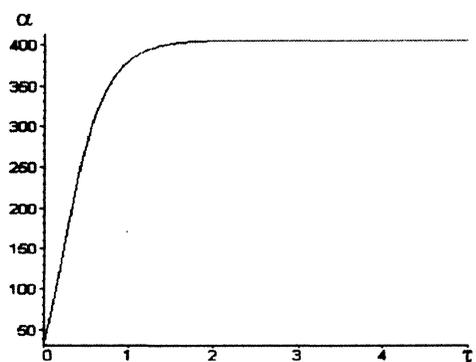
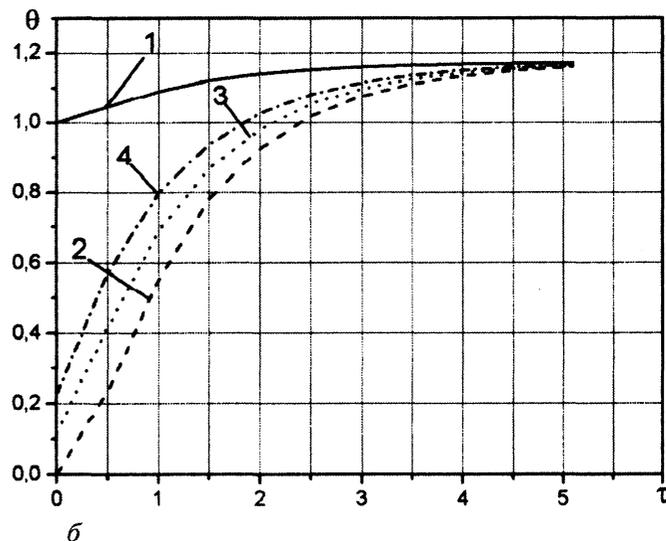
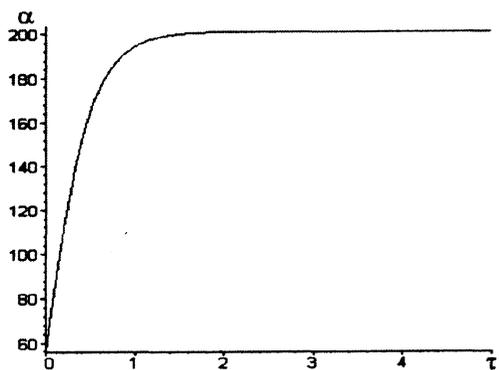
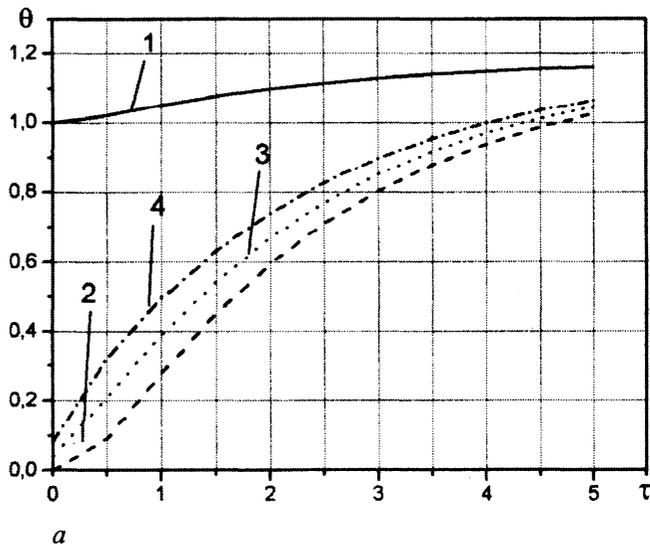
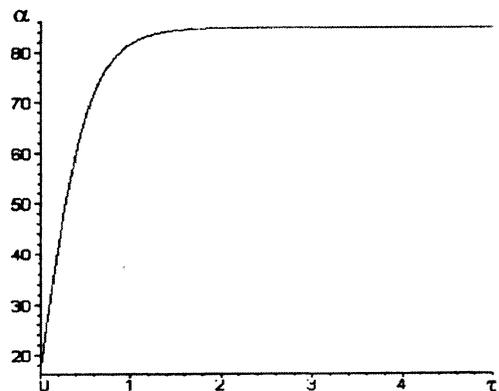


Рис. 6. Динамика температур газа (T) и температур в характерных точках сечения призматической заготовки при значении отношения водяных чисел $W = 0,3$ для различных аппроксимаций коэффициента теплоотдачи α

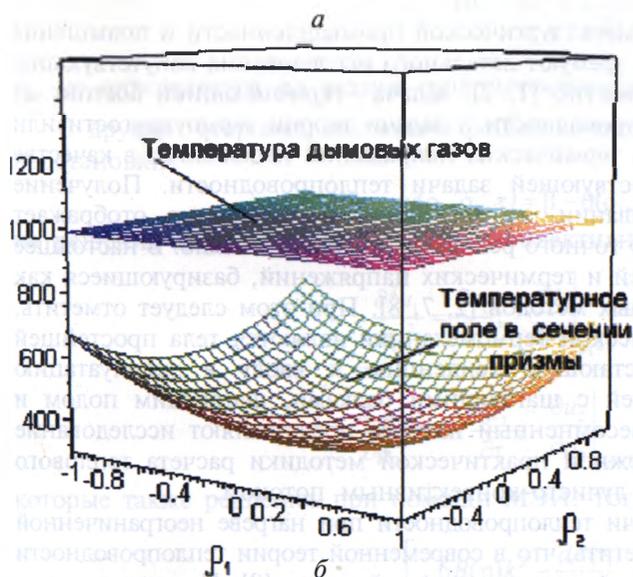
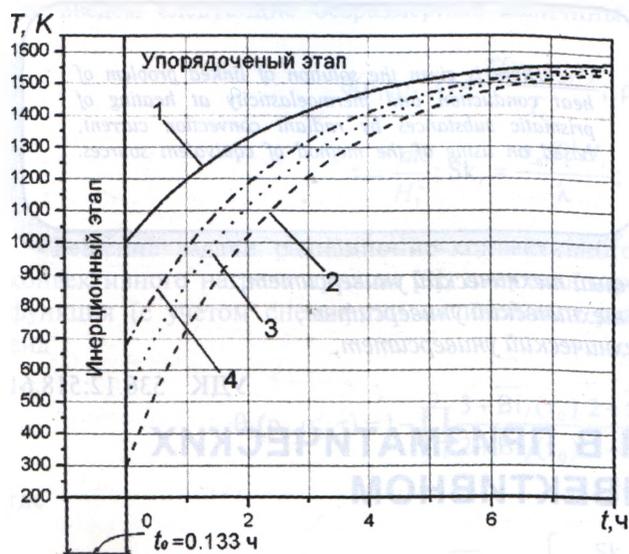


Рис. 7. Динамика температур газа (1) и температур в характерных точках сечения призматической заготовки (2 – центр; 3 – середина боковой поверхности; 4 – ребро) при значении отношения водяных чисел $W = 0,3$ (а) и температурное поле в сечении призмы и газа (б)

Заключение

Впервые в теории противоточного теплообмена получено приближенное решение задачи теп-

лопроводности при нагреве двумерной призмы конвективным потоком. Проведено исследование решения при различных способах задания коэффициента теплоотдачи α и для разных значений отношения водяных чисел $W = Vc/(V_r c_r)$, при этом взаимное изменение температур теплоносителя (газа) и металла (в характерных точках сечения тела) соответствует общим представлениям о сходящемся процессе противоточного теплообмена.

Литература

1. Гольдфарб Э.М. Нагрев тел различной формы газами в прямотоке и противотоке // Журн. техн. физики. 1954. Т.24. Вып.6.
2. Кавадеров А.В., Калугин В.Н. Закономерности нагрева массивного тела излучением в противотоке // Сб. науч.тр. ВНИИМТ: Нагрев металла и работа нагревательных печей. Свердловск: Metallurgizdat, 1960. №6. С. 59–70.
3. Постольник Ю.С., Огурцов А.П., Тимошпольский В.И., Трусова И.А. Математическая модель радиационного нагрева массивных тел в теоретическом противотоке // Математичне моделювання (науковий журнал). Днепродзержинск: ДГТУ. 2000. № 2 (5). С. 87–91.
4. Нагрев термочувствительных материалов в условиях противоточного радиационно-конвективного теплообмена / Ю.С. Постольник, В.И. Тимошпольский, В.В. Филиппов и др. // Литье и металлургия. 2001. №3. С. 53–56.
5. Анализ температурного состояния массивного плоского слитка в условиях радиационного противотока / Ю.С. Постольник, В.И. Тимошпольский, А.П. Огурцов и др. // Литье и металлургия. 2003. №1. С. 53–56.
6. Закономерности нагрева массивных тел излучением в теоретическом противотоке / Ю.А. Самойлович, А.В. Кавадеров, В.И. Тимошпольский и др. // Литье и металлургия. 2000. №4. С. 117–122.
7. Математическое моделирование нагрева термически массивных тел в условиях теоретического противоточного теплообмена излучением / В.И. Тимошпольский, Ю.С. Постольник, С.М. Козлов и др. // Металлургия. Мн.: Выш.шк., 2002. Вып.26. С. 12–18.
8. Стальной слиток. В 3-х т. Т.3. Нагрев / В.И. Тимошпольский, Ю.А. Самойлович, И.А. Трусова и др.; Под общ. ред. В.И. Тимошпольского, Ю.А. Самойловича. Мн.: Белорусская наука, 2001.
9. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности. В 2-х ч. М.: Высш.шк., 1982.
10. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М.: Наука, 1975.
11. Лыков А.В. Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1970. № 5. С. 109–150.
12. Постольник Ю.С. Приближенные методы исследований в термомеханике. Киев. – Донецк: Виш. шк., 1984.