



In this article there is examined one of the actual problems of the mathematical modelling of thermal processes – optimization of numerical solution of the thermal conduction equation. The dynamic increase of similarity groups using the new method is reflected.

А. Н. ЧИЧКО, А. С. БОРОЗДИН, Белорусский национальный технический университет

УДК 681.512:669.27

О НОВОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ТЕПЛОВОЙ ЗАДАЧИ ОХЛАЖДЕНИЯ 3D ОБЪЕКТОВ

При моделировании тепловых полей трехмерных объектов важнейшей характеристикой является время счета. Оно может стать критическим, если объект разбит на большое количество элементов (больше 100 000) и при этом моделируемое время счета велико. Подобные задачи очень широко распространены при изучении процессов нагрева и охлаждения промышленных сплавов, протекающих в большом временном промежутке. В этом случае время машинного счета является серьезной проблемой, затрудняющей решение конкретных прикладных задач, связанных с оптимизацией режимов нагрева. В настоящей работе развивается подход, который может позволить существенно снизить временные затраты машинного времени на обработку 3D объектов со сложной геометрией в сравнении с использованием традиционного метода конечных разностей.

Цель данной работы – разработка нового метода решения трехмерной тепловой задачи, основанного на идеи группирования температурно-временных зависимостей элементов объекта, уменьшающего необходимое количество времени для моделирования процессов охлаждения и нагрева.

В качестве математической модели использовали трехмерное уравнение теплопроводности Фурье–Кирхгофа:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q(x, y, z, \tau), \quad (1)$$

где c – теплопроводность; ρ – плотность; $\lambda(T)$ – теплоемкость, x, y, z – координаты рассчитываемой области объекта и среды; $T(x, y, z, \tau)$ – температура точки с координатами x, y, z в момент времени τ .

Применив метод конечных разностей к уравнению (1), получим рекуррентную формулу первого порядка точности для расчета температуры [1]:

$$T_{x,y,z}^{n+1} = T_{x,y,z}^n + \Delta\tau \frac{\lambda}{c\rho} \left(\frac{T_{x+\Delta x, y, z}^n - 2T_{x, y, z}^n + T_{x-\Delta x, y, z}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{x, y+\Delta y, z}^n - 2T_{x, y, z}^n + T_{x, y-\Delta y, z}^n}{\Delta y^2} + \frac{T_{x, y, z+\Delta z}^n - 2T_{x, y, z}^n + T_{x, y, z-\Delta z}^n}{\Delta z^2} \right). \quad (2)$$

В дополнение к традиционному расчету по температуре был разработан алгоритм (“метод группирования элементов”), позволяющий группировать элементы 3D объекта на основе температурных зависимостей и уменьшать число “проходов” по пространственному объекту в заданные интервалы времени. Сущность этого метода сводилась к следующему. Первоначально, используя классическое решение тепловой задачи (т.е. последовательное вычисление значений температуры для всех элементов клеточного автомата), рассчитывали состояния модели на протяжении k тактов. Вычисленные значения сохраняли и затем по рассчитанным данным проводили поиск областей, клетки которых имели одинаковые (или близкие) значения на протяжении всего времени счета (от начала моделирования до текущего момента времени t_k), т.е. такие области, для которых выполнялось следующее условие:

$$|T_{(x_i, y_i, z_i)}^k - T_{(x_j, y_j, z_j)}^k| \leq \varepsilon, \quad (3)$$

где $T_{(x_i, y_i, z_i)}^k$ и $T_{(x_j, y_j, z_j)}^k$ – температура клеток с координатами x_i, y_i, z_i и x_j, y_j, z_j соответственно на k -м такте расчета; ε – допустимая погрешность при сравнении температур клеток.

Если при тактах i и j ($j > i$) количество групп, а следовательно, и их состав равны, то классический расчет прекращался. На втором этапе, после того как обнаружено N устойчивых групп, алгоритм переводится в режим группированного расчета, при котором значение вычисляется только для одной клетки из группы, а затем рассчитанное значение присваивается остальным

клеткам группы. Таким образом, расчет проводился не для всех клеток, участвовавших в

расчете, а только для N . На рис. 1 приведена блок-схема описанного выше алгоритма.

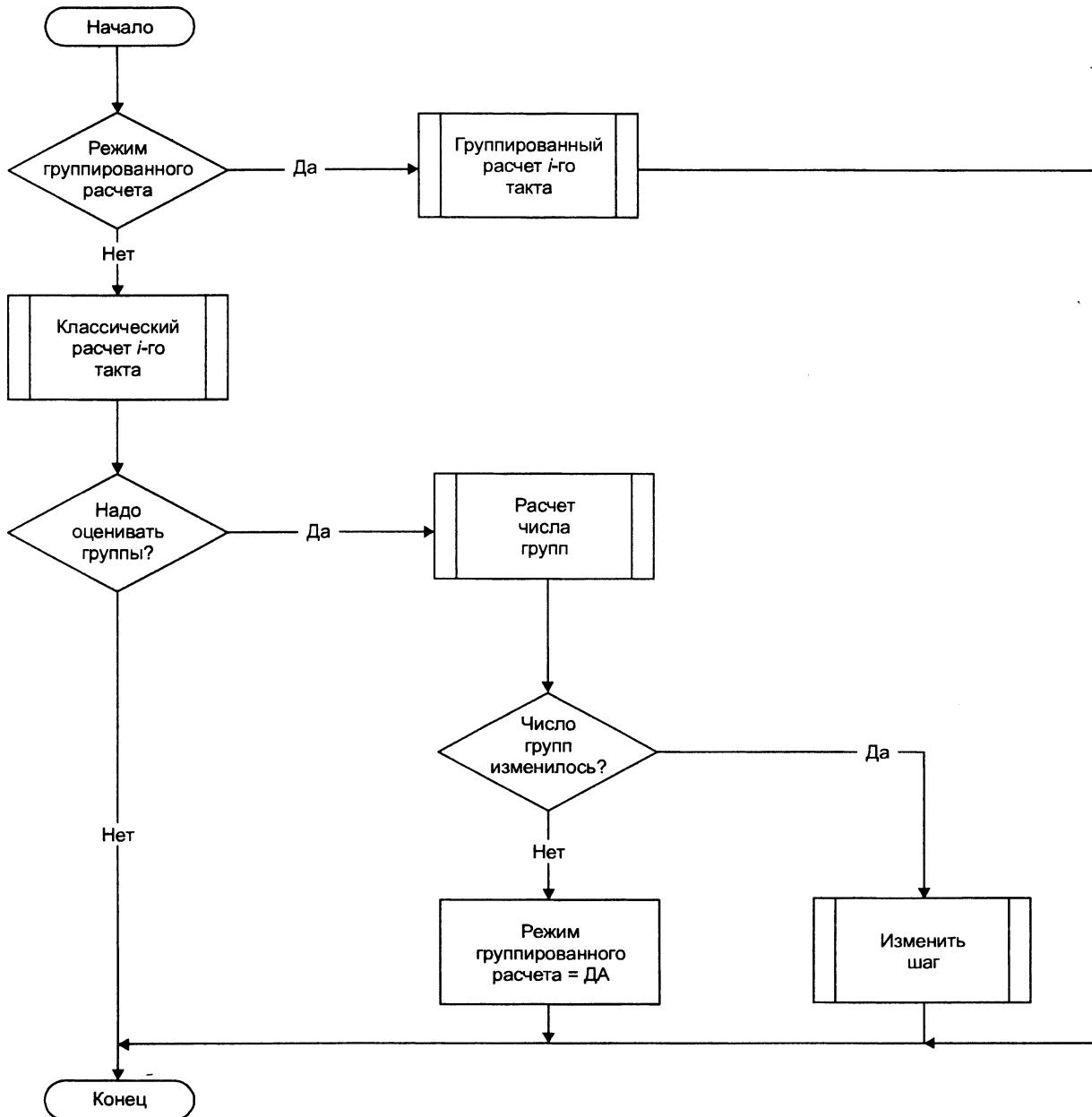


Рис. 1. Алгоритм расчета i -го такта по методу группирования

В процессе расчета вычисляли долю групп P_k от общего числа элементов:

$$P_k = \frac{N_k}{M}, \quad (4)$$

где N_k – число обнаруженных групп на k -м такте расчета; M – общее число элементов, участвующих в расчете (форма + объект).

Для сравнительной оценки погрешности результатов моделирования по температуре, полученных с помощью метода группирования, развивающегося в статье, и классического метода конечных разностей были использованы следующие формулы:

$$\Omega_{\max} = \max_{x,y,z} (T'_{x,y,z} - T''_{x,y,z}), \quad (5)$$

$$\Omega_{\text{средн}} = \frac{\sum_{x,y,z} |T'_{x,y,z} - T''_{x,y,z}|}{M}, \quad (6)$$

где $T'_{x,y,z}$ – значение температуры в точке с координатами x,y,z , рассчитанное по методу группирования; $T''_{x,y,z}$ – значение температуры в точке x,y,z , рассчитанное традиционным способом.

Метод группирования был реализован в виде программы для ПЭВМ. Входными данными явля-

ются пространственный размер сетки, временной шаг и теплофизические характеристики формы и объекта. Программа позволяет проводить моделирование процессов теплообмена сложных пространственных объектов. Программное обеспечение написано на языке программирования высокого уровня – Object Pascal в визуальной среде быстрой разработки приложений Delphi 6.0 для 32-разрядных операционных систем семейства Windows.

Тестируирование оптимизированного варианта алгоритма расчета и его сравнение с классическим алгоритмом проводили на трех тестовых объектах с разной степенью симметричности («крест», «кольцо» и «пирамида») и двух про-

мышленных отливках («диск» и «патрубок»). Плоскостные сечения тестовых объектов показаны на рис. 2, а 3D изображения промышленных объектов – на рис. 3. Моделируемые объекты принимали изготовленными из алюминия со следующими свойствами: теплоемкость $\lambda = 40 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, теплопроводность $c = 838 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$, плотность $\rho = 2380 \text{ кг}/\text{м}^3$. В качестве среды охлаждения была выбрана стальная форма с характеристиками: $\lambda = 40 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, $c = 524 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$, $\rho = 7600 \text{ кг}/\text{м}^3$. Начальная температура объектов $t_a = 800 \text{ }^\circ\text{C}$, температура среды $t_c = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Для расчета использовали компьютер со следующими характеристиками: Р-IV – 1,5 Гц, 256 Мб ОЗУ, ОС Windows 2000.

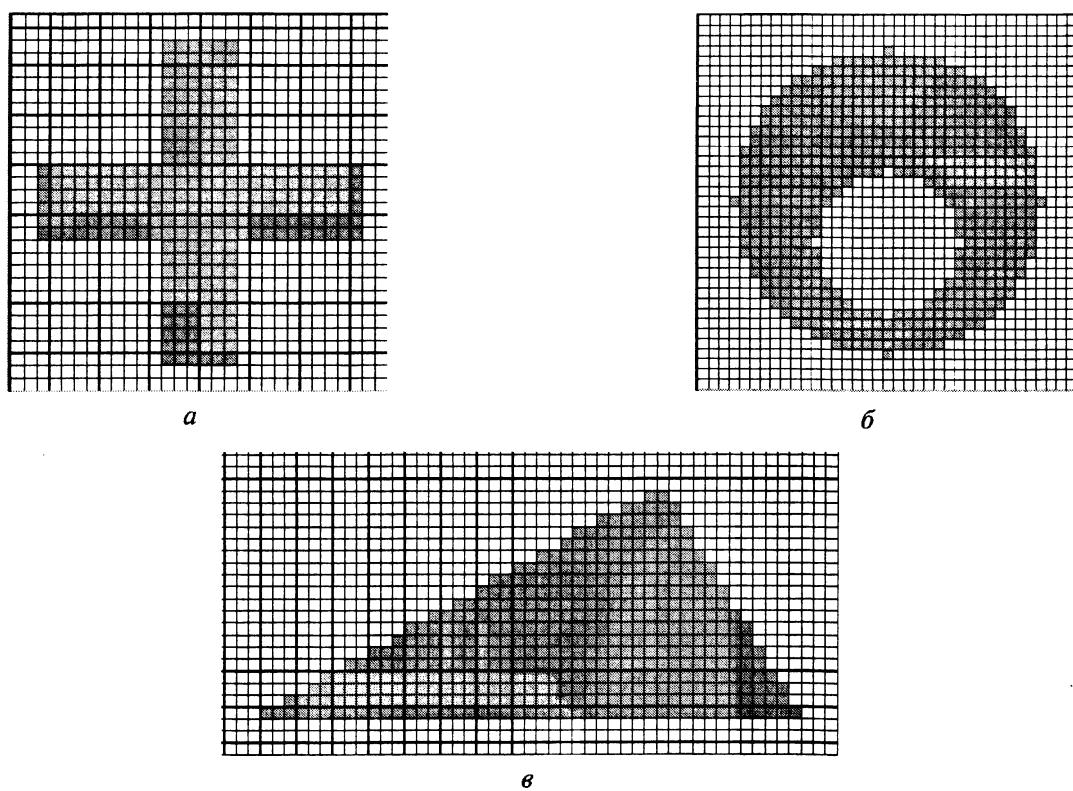


Рис. 2. Изображения продольных сечений 3D объектов типа “крест” (а), “кольцо” (б) и “пирамида” (в)

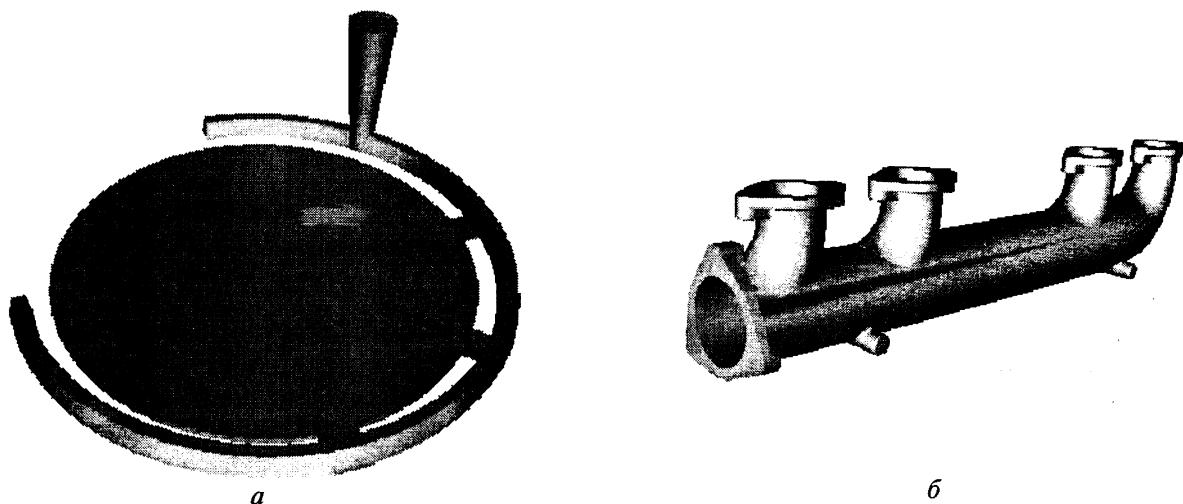


Рис. 3. Трехмерные изображения промышленных отливок типа “диск” (а) и “патрубок” (б)

Для тестовых объектов моделирование процесса охлаждения проводили для первых 50 с. Временной шаг Δt принимался равным 0,05 с, пространственный шаг $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,1$ мм. На рис. 4 представлены зависимости роста долей групп для каждого из тестовых объектов.

Затраты машинного времени на расчет объектов традиционным методом и методом группирования приведены в табл. 1. Как видно из рис. 4 и таблицы, алгоритм эффективно использует симметричность объекта ("крест" и "кольцо") и не ухудшает временные показатели для несимметричных объектов ("пирамида").

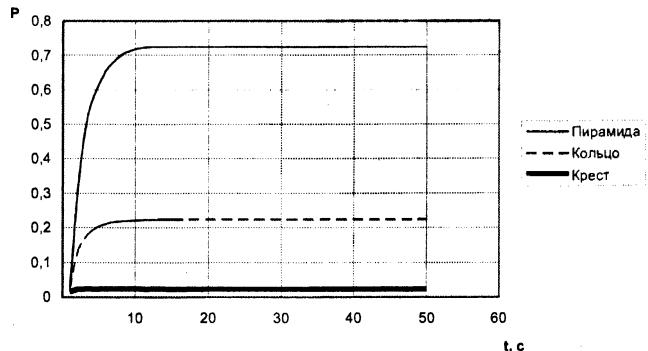


Рис. 4. Диаграмма роста долей групп для объектов с различной степенью симметричности

Таблица 1. Результаты расчета тестовых объектов и их пространственные характеристики

Объект	Число элементов (форма + объект)	Время расчета t , с	
		традиционный метод	метод группирования
Крест	4624+2376=7000	35	18
Кольцо	3240+7395=10635	56	34
Пирамида	3988+7015=11003	57	54

Динамика изменения погрешностей при использовании метода группирования по сравнению

с традиционным методом расчета для тестовых объектов показана на рис. 5.

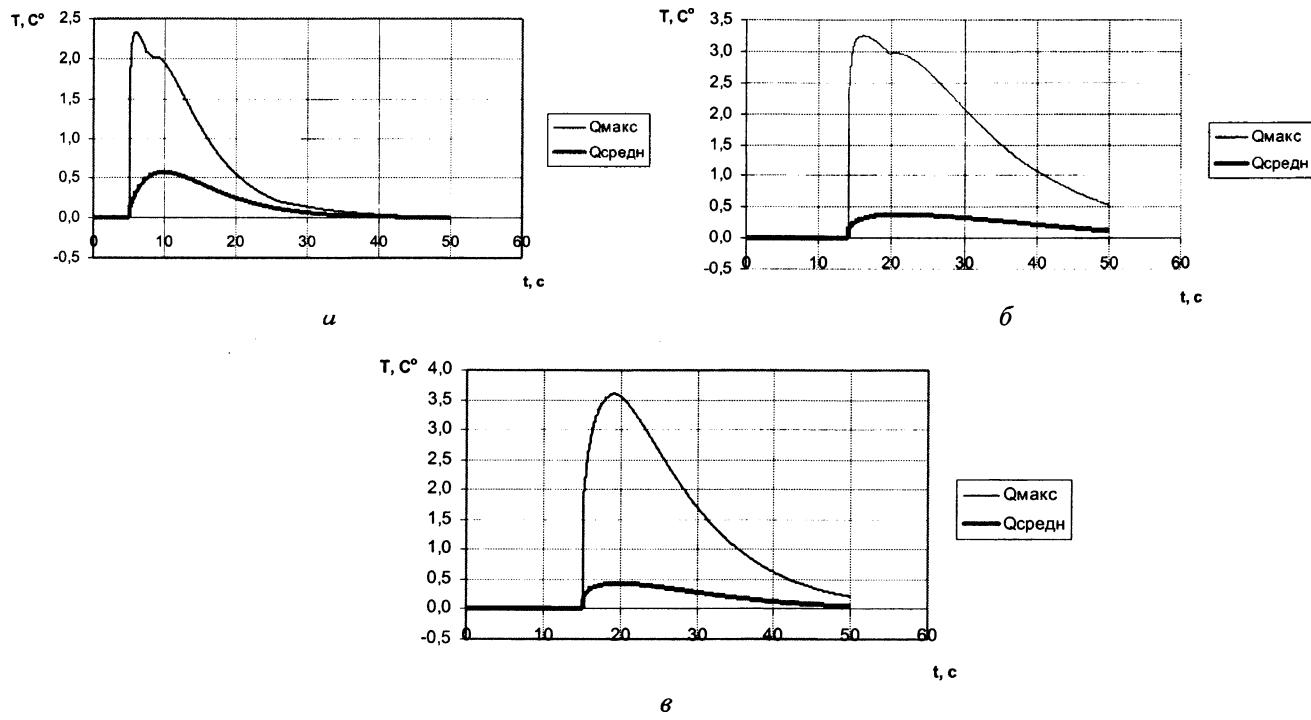


Рис. 5. Диаграммы изменения погрешности тестовых объектов "крест" (а), "кольцо" (б) и "пирамида" (в)

Высокую эффективность метод группирования показал также и при расчете промышленных отливок. Ниже представлены соответствующие результаты численного моделирования традиционным методом и методом группирования для промышленных объектов со сложной пространственной геометрией. Для детали типа "диск" расчет проводился для 5000 с, а для детали типа "патрубок" – для 6000 с. Временные шаги и шаги

по пространству для обоих объектов были равны: $\Delta t = 1$ с, $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1$ мм. Из табл. 2 видно, что выигрыш во времени счета при использовании нового метода оказался существенным. Для объекта типа "диск" он составил более 40 %, а для объекта типа "патрубок" – более 25 %. В то же время погрешность, привносимая методом, оказалась в приемлемых границах и не превысила 3,5 %.

Таблица 2. Результаты расчета промышленных объектов и их пространственные характеристики

Объект	Число элементов (форма + объект)	Время расчета t , с	
		традиционный метод	метод группирования
Крест	$4624+2376=7000$	35	18
Кольцо	$3240+7395=10635$	56	34
Пирамида	$3988+7015=11003$	57	54

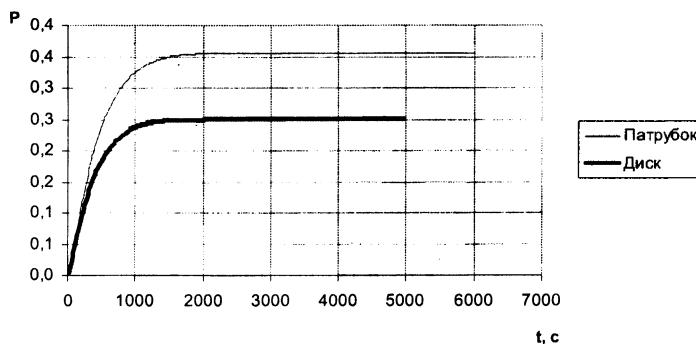


Рис. 6. Диаграмма роста долей групп для объектов типа "диск" и "патрубок"

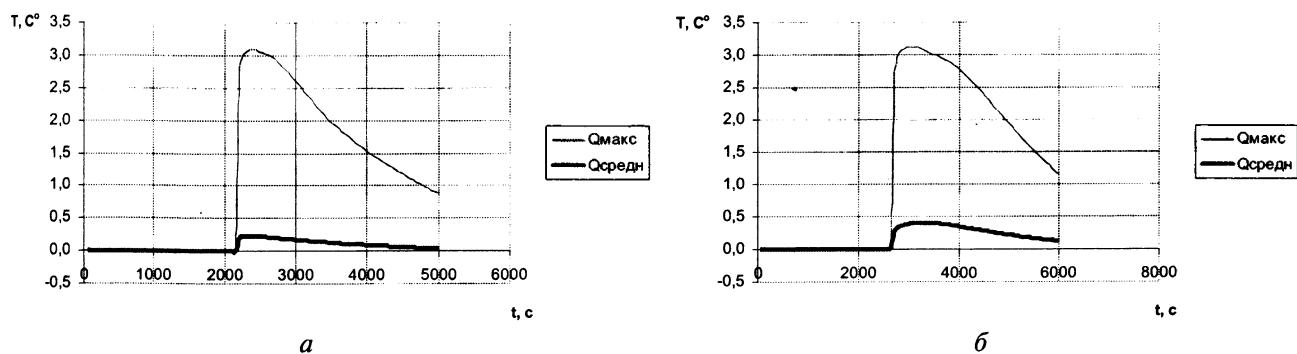


Рис. 7. Диаграммы изменения погрешности объектов: а – "диск"; б – "патрубок"

Таким образом, проведенные расчеты показали, что независимо от сложности пространственной конфигурации 3D объекта предлагаемый метод группирования в его применении к тепловой задаче может снизить затраты машинного времени на расчете в среднем на 15%. Хотя, безусловно, наибольшую эффективность метод проявляет при расчете объектов с большой степенью симметричности, для объектов с низкой степенью симметричности метод группирования не увеличивает продолжительность машинного счета по сравнению с традиционным подходом.

Разработанный метод может быть особенно эффективно использован при расчетах деталей, проходящих термическую обработку в печи в течение длительных времен. Он может быть также использован и для оценки температурных изменений и их влияний на структуру для процессов вторичного старения (или дисперсионного твердения) алюминиевых сплавов.

Литература

- Чичко А. Н., Лихоузов С. Г. Моделирование и информационные технологии проектирования. Мн.: ИТК, 2000. С. 91–99.