



In the article there is examined the problem of application of the conformal maps method at the projection of the foundry processes auxiliaries. There is given the solution of the problem of Stefan for more typical configurations of design field at projection of discard heads and outside chiller.

Ю. А. САМОЙЛОВИЧ, НПП «Платан», г. Екатеринбург,
В. И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ, Г. А. КЛИМОВИЧ, БНТУ

УДК 669.18:621.746.047

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УПРОЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ОСНАСТКИ ЛИТЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Фасонные отливки отличаются большим разнообразием геометрических форм. В работе [1] приводится следующая классификация форм фасонных отливок: куб, втулка, рычаг, цилиндр, диск, плита, труба, колесо, рама, кронштейн, коробка, арматура, сложная форма как комбинация криволинейных стенок и рычагов.

До недавнего времени при проектировании отливок и литейных форм использовали весьма упрощенные способы определения конфигурации фронта кристаллизации. В частности, рекомендуется графическое построение серии изосолид, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга [2], или рассмотрение диаметров шаров или окружностей, вписанных в различные сечения (узлы) отливки. На рис. 1 представлены некоторые характерные виды используемых прибылей для отливок цилиндрической, прямоугольной и крестообразной формы, причем размер прибылей подбирается с учетом минимальной вероятности возникновения усадочной раковины в термическом центре отливки, затвердевающей в последнюю очередь. Авторы [3] при определении размера прибылей рекомендуют исходить из следующих положений.

1. Методом вписанных окружностей определяется ширина или диаметр нижнего сечения прибыли; одновременно решается вопрос о выборе необходимых «напусков» для получения здоровой отливки исходя из принципа направленного затвердевания.

2. Определяется объем металла, необходимый для компенсации усадки металла в термическом центре отливки.

3. В зависимости от конфигурации прибыли (цилиндрическая или прямоугольная) подсчитанному объему компенсирующего металла придается форма шара (или цилиндра) и рассчитывается диаметр шара (или цилиндра), обозначенный на рис. 1 символом $D_{пр}$.

На рис. 2 показаны различные способы использования другого распространенного элемента

литейной оснастки — наружного холодильника, установка которого преследует цель локального ускорения кристаллизации металла в термическом центре отливки и устранения возможного образования усадочной раковины.

При заданном расположении прибыли или наружного холодильника возникает задача определения продвижения фронта кристаллизации и оценка вероятности усадочной раковины в термическом центре отливки при выбранных значениях геометрических и физических параметров прибыли или наружного холодильника.

Решение данной задачи может быть осуществлено с помощью аналитических или численных способов решения задачи Стефана для принятой конфигурации термического узла отливки.

Как известно [4, 5], точное аналитическое решение задачи Стефана получено для тел «правильной» формы — плиты, цилиндра и шара, в связи с чем возможности практического применения таких аналитических решений весьма ограничены. Предпринимались попытки обобщения аналитического решения задачи Стефана для полуограниченного пространства путем введения соответствующих поправочных множителей в выражение для оценки продолжительности затвердевания отливок более сложной конфигурации [6], однако такие попытки не получили распространения ввиду недостаточной надежности вводимых поправочных коэффициентов.

Развитие современной вычислительной техники и численных методов решения задач математической физики определило более перспективное направление при анализе процесса затвердевания металла в отливках сложной конфигурации [7–9]. В качестве примера достижений в этом направлении можно отметить программный продукт WINCAST, разработанный фирмой RWP (Германия), позволяющий прогнозировать не только динамику процесса затвердевания фасонной отливки, но также проследить за процессом

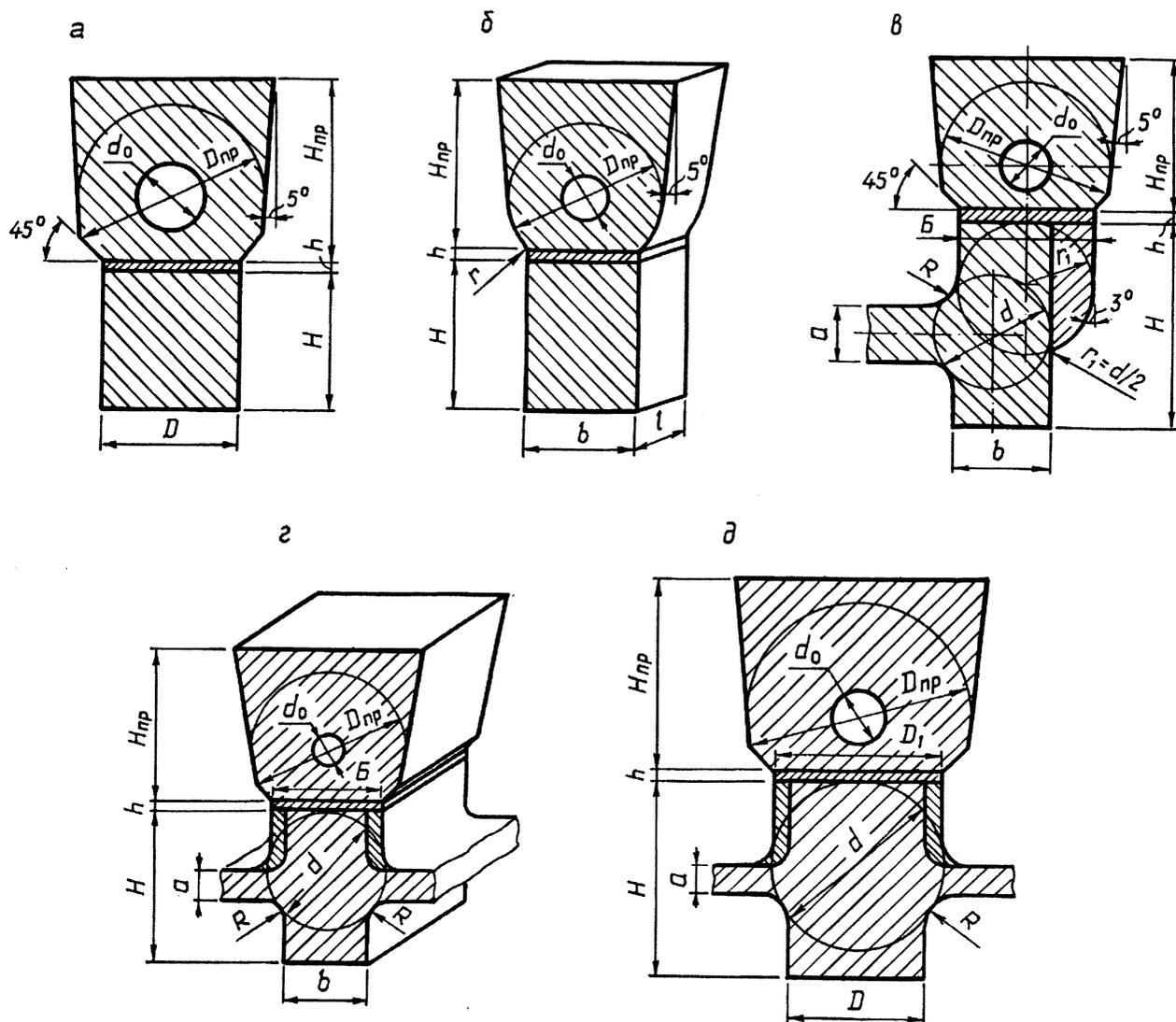


Рис. 1. Разновидности используемых приливей для фасонных отливок: а – цилиндрического сечения; б – прямоугольного сечения; в – узлов отливок Т-образного сечения; з, д – крестообразного сечения

заполнения литейной формы расплавом, а также за возникновением остаточных напряжений в отливке [10].

К сожалению, высокая стоимость указанного программного продукта является сдерживающим фактором при его использовании для многих отечественных предприятий.

Кроме того, нельзя не учитывать то обстоятельство, что во многих случаях нет необходимости в использовании сложных программ и ЭВМ, когда требуется выполнить оценку скорости затвердевания в узлах отливки сложной конфигурации с допустимой погрешностью в пределах 5–10 %. Для таких случаев представляется возможным использование упрощенной (инженерной) методики расчета затвердевания отливок сложной конфигурации, основанной на применении метода конформных отображений [11–15].

Исходные предпосылки математической формулировки задачи сводятся к следующему:

- расплав, заполняющий литейную форму, представляет собой металл или расплав со столь узким интервалом кристаллизации, что можно считать температуру фазового перехода (кристаллизации) неизменной ($T_{кр}$);

- не учитывается наличие конвективных потоков в расплаве, вызванных различными причинами (движение струи при разливке, неравномерность плотностей и др.);

- перегрев жидкой фазы не принимается во внимание, т.е. предполагается, что на протяжении всего процесса кристаллизации отливки жидкая фаза находится при температуре кристаллизации;

- рассматривается двумерное поле температур и тепловых потоков в твердой корке отливки.

Важным предположением является гипотеза о том, что по мере продвижения фронта кристаллизации изотермы сохраняют подобие между собой (постулат автомодельности). В подтверждение справедливости данной гипотезы можно привести

Левая часть уравнения (1) представляет собой расход теплоты (на единицу толщины слоя) с охлаждаемого участка отливки γ_1 длиной l , правая часть учитывает выделение теплоты фазового перехода и изменение энтальпии твердой корки при снижении температуры с $T_{кр}$ до \bar{T} , причем $\bar{T}(t) = \frac{1}{S} \iint T(x, y, t) dx dy$ – среднemasсовая температура твердой корки в момент времени t , $S(t) = \iint dx dy$ – площадь сечения элемента площади $ABCD$ к моменту t .

Используем предположение о том, что поле температур в расчетной области канонического вида определяется соответствующим решением задачи стационарной теплопроводности. Как показал анализ, погрешность определения длительности затвердевания отливок при использовании квазистационарного подхода не превышает 8–10 % по сравнению с практически точным решением задачи (полученным методом конечных разностей), что можно признать вполне приемлемым для инженерных расчетов.

Использование постулата квазистационарности температурного поля позволяет применять математический аппарат теории конформных отображений [16–18]. Введем в рассмотрение две плоскости комплексного переменного

$$Z = X + iY \quad \text{и} \quad \omega = u + iv,$$

где $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$; $X = x/l$, $Y = y/l$ – безразмерные координаты.

Выбираем на плоскости Z расчетную область d канонического вида, ограниченную изотермами ($T = T_{кр}$, $T = T_n$) и линиями тока, образующими взаимно-ортогональную сетку.

С помощью аналитической функции

$$\omega = u + iv = f(Z) \quad (2)$$

конформно отобразим расчетную область d на область D (плоскости ω) более простого вида,

полагая, что решение задачи стационарной теплопроводности для области d имеет простой вид. Полагая, что функция $\omega = f(Z)$ с точностью до вещественных констант A и B совпадает с комплексным термическим потенциалом $W(Z)$, т.е.

$$W(Z) = A\omega(Z) + B = Q + i\theta, \quad (3)$$

приходим к заключению о том, что прямые $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$ являются отображением изотерм и линий тока на плоскость ω .

На рис. 4 показано, в частности, каким образом исходный четырехугольник $ABCD$ отображается на полосу (прямоугольник) $abcd$, границы которого ab и cd являются изотермами, а границы bc и da – линиями тока. Стационарное поле температур в полосе $abcd$ одномерное и линейное:

$$T = T(v) = T_n + (T_{кр} - T_n) \frac{v - v_1}{v_2 - v_1}, \quad (4)$$

где $T_{кр}$, T_n , T_c – температуры фазового перехода (затвердевания), поверхности отливки, окружающей среды.

В связи с чем выполняются равенства:

$$\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{T_{кр} - T_n}{v_2 - v_1}, \quad \bar{T} = 0,5(T_{кр} + T_n), \quad (5)$$

при переходе от переменных x, y к новым переменным u, v уравнение теплового баланса (1) принимает вид:

$$\int_0^{u_2} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_{v=v_1} du = \rho \left[L + c_p (T_{кр} - \bar{T}) \right] \frac{dS(t)}{dt} \quad (6)$$

или, учитывая (5),

$$\lambda (T_{кр} - T_n) \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} = \rho \left[L + \frac{c_p}{2} (T_{кр} - T_n) \right] \frac{dS(t)}{dt}. \quad (7)$$

Площадь элемента $ABCD$ в момент t равна:

$$S = l^2 \iint dXdY$$

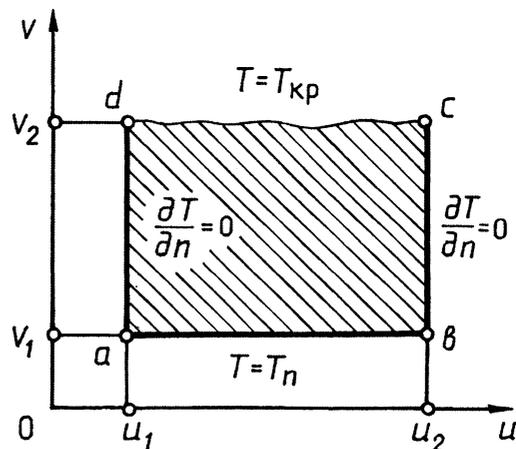
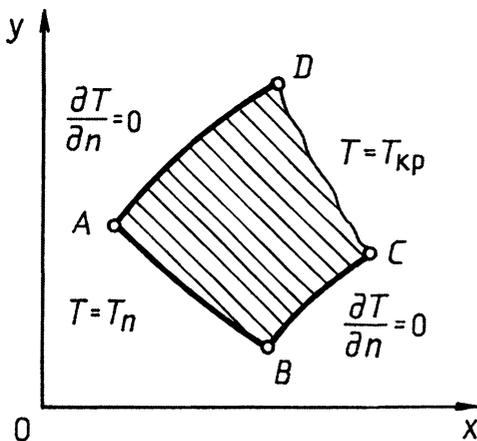


Рис. 4. Конформное отображение области канонического вида

или при переходе к переменным u, v

$$S(t) = l^2 \iint D(u, v) du dv, \quad (8)$$

где $D(u, v)$ – функциональный определитель (якобиан), выражение которого имеет вид:

$$D(u, v) = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u}. \quad (9)$$

Зависимости

$$X = X(u, v), \quad Y = Y(u, v) \quad (10)$$

могут быть найдены из обращения отображающей функции (2):

$$Z = X + iY = f_1(\omega) \quad (11)$$

и сравнения действительных и мнимых частей последнего уравнения.

Поскольку

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} = l^2 \frac{d\varepsilon}{dt} \int_{u_1}^{u_2} D(u, \varepsilon) du, \quad (12)$$

где $\varepsilon = \varepsilon(t)$ – значение координаты $v = \text{const}$, отвечающей положению фронта кристаллизации в момент t , уравнение теплового баланса (7) принимает вид:

$$\lambda (T_{кр} - T_n) \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} dt = \rho l^2 \left[L + \frac{c_p}{2} (T_{кр} - T_n) \right] d\varepsilon \int_{u_1}^{u_2} D du. \quad (13)$$

Примем для простоты $u_1 = 0, v_1 = 0, u_2 = l, v_2 = \varepsilon$, тогда последнее уравнение будет иметь вид

$$\frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{c_p (T_{кр} - T_n)}{L} \frac{dt}{l^2 \left[1 + \frac{c_p (T_{кр} - T_n)}{2L} \right]} = \varepsilon d\varepsilon \int_0^1 D(u, \varepsilon) du. \quad (14)$$

Вводя безразмерные комплексы

$$\Theta_n = \frac{T_{кр} - T_n}{T_{кр} - T_c}, \quad \tau = \frac{\lambda t}{\rho c_p l^2}, \quad K = \frac{c_p (T_{кр} - T_n)}{L}$$

и интегрируя уравнение (14) при начальном условии

$$\varepsilon = 0 \text{ при } t = 0, \quad (15)$$

получаем решение задачи

$$\frac{2K\Theta_n}{2 + K\Theta_n} \tau = \int_0^\varepsilon \varepsilon d\varepsilon \int_0^1 D(u, \varepsilon) du, \quad (16)$$

где геометрические особенности расчетной области учтены формой якобиана D .

В качестве примера рассмотрим использование решения (16) при анализе затвердевания расплава в углах (от нуля до 2π). На рис. 5 показаны различные случаи, возможные здесь.

Расчетная область $OBCD$ ограничена охлаждаемым участком OB , изотермой CD и двумя адиабатическими линиями тока BC и OD .

Введем параметр $p = \frac{\pi}{\alpha}$. Изучаемая область характеризуется изменением угла α от 0 до 360° , чему отвечает изменение коэффициента $p = \frac{\pi}{\alpha}$ от 0,5 до

∞ . В частности, в первом квадранте ($\frac{\pi}{2} \geq \alpha > 0$) $2 \leq p < \infty$, во втором – ($\pi \geq \alpha \geq \frac{\pi}{2}$) $1 \leq p \leq 2$, в

третьем квадранте ($3\frac{\pi}{2} \geq \alpha \geq \pi$) $\frac{2}{3} \leq p \leq 1$, в четвертом квадранте ($2\pi \geq \alpha \geq 3\frac{\pi}{2}$) $\frac{1}{2} \leq p \leq \frac{2}{3}$.

Аналитическая функция

$$\omega = u + iv = Z^p \quad (17)$$

конформно отображает расчетную область $OBCD$ на полосу $Obcd$, причем якобиан равен

$$D = \frac{1}{p^2} (u^2 + v^2)^{\frac{1}{p}-1}, \quad (18)$$

$$\frac{2K\Theta_n}{2 + K\Theta_n} \tau = \frac{1}{2p} \int_0^1 (u^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{p}-1} du - \frac{1}{2(p+2)}. \quad (19)$$

Толщина твердой корки ε_0 в направлении биссектрисы угла α связана с параметром ε формулой:

$$\varepsilon_0(t) = l \varepsilon^{1/p}(\tau), \quad (20)$$

вытекающей из соответствия точек D и d :

$$r_D = \frac{\varepsilon_0}{l}, \quad \theta_D = \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2p},$$

$$u_d = 0, \quad v_d = \varepsilon = r_D^p \sin p\theta = \left(\frac{\varepsilon_0}{l}\right)^p \sin \frac{\pi}{2} = \left(\frac{\varepsilon_0}{l}\right)^p.$$

Для угла $\alpha = 90^\circ$ (рис. 5, б) взаимосвязь параметра ε со временем имеет вид

$$\frac{2K\Theta_n}{2 + K\Theta_n} \tau = \frac{1}{8} \left(\varepsilon^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\varepsilon} + \sqrt{1 + \varepsilon^2} - 1 \right). \quad (21)$$

Параметр ε связан с толщиной твердой корки ε_0 вдоль биссектрисы угла формулой:

$$\varepsilon_0(t) = l \sqrt{\varepsilon(t)}, \quad (22)$$

вытекающей из соответствия точек D и d :

$$X_D = Y_D = \frac{\varepsilon_0}{l} \cos \frac{\pi}{4},$$

$$u_d = 0, \quad v_d = \varepsilon = 2 \left(\frac{\varepsilon_0}{l} \cos \frac{\pi}{4} \right)^2 = \left(\frac{\varepsilon_0}{l} \right)^2.$$

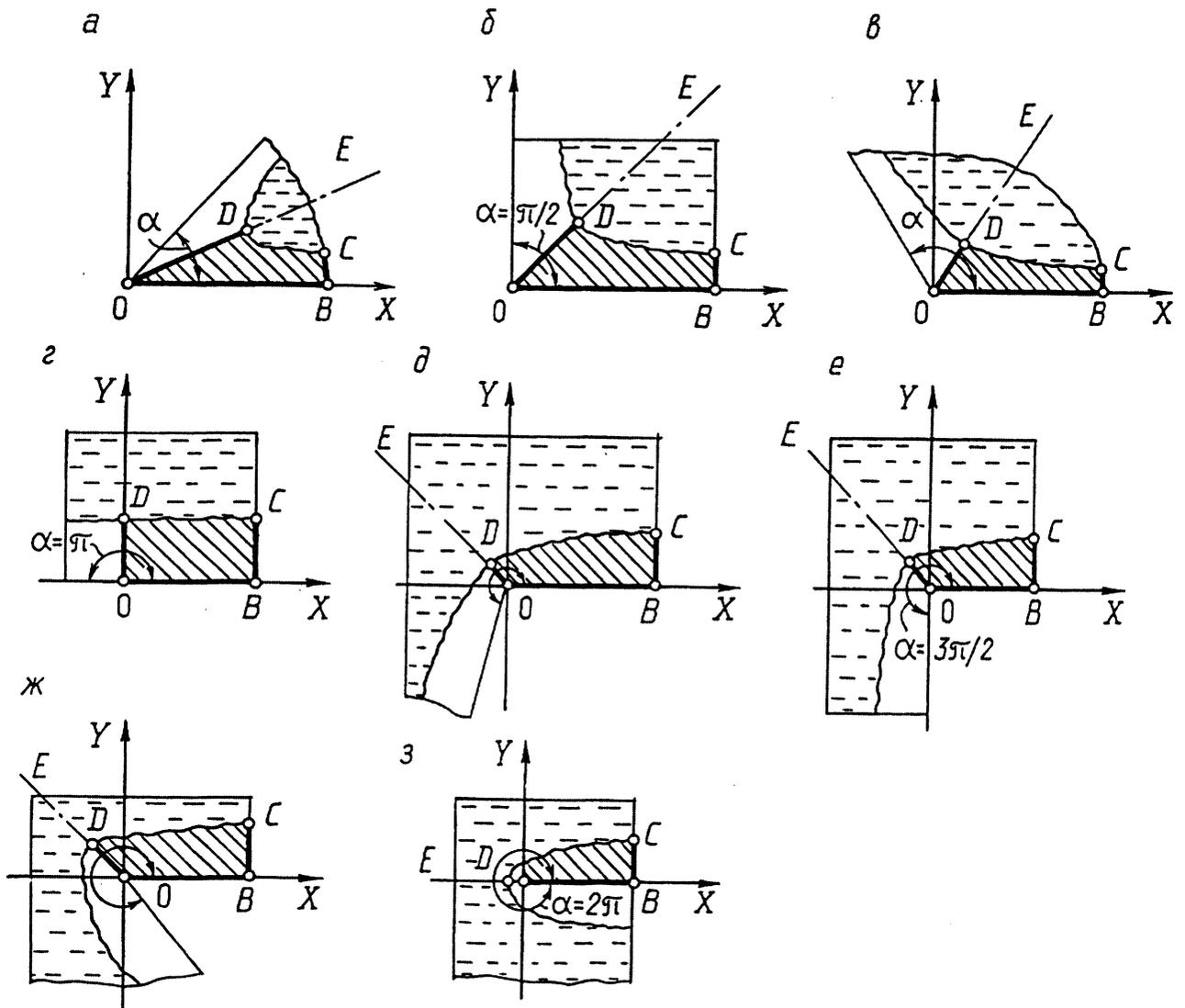


Рис. 5. Схемы выделения расчетных областей для различных углов литейной формы: а - $\alpha < 90^\circ$; б - $\alpha = \frac{\pi}{2}$; в - $\alpha > \frac{\pi}{2}$;

$$г - \alpha = \pi; д - \alpha > \pi; е - \alpha = \frac{3\pi}{2}; ж - \alpha > \frac{3\pi}{2}; з - \alpha = 2\pi$$

Для угла $\alpha = 270^\circ$ (при $p = 2/3$) имеем (рис. 5, е):

$$\epsilon_0(t) = l\epsilon^{1/2}(\tau).$$

Для такого случая решение (19) берется в квадратурах и имеет вид

$$\frac{2K\theta_n}{2+K\theta_n}\tau = \frac{9}{8} \left[\frac{\epsilon^4}{4} \ln \frac{1+\sqrt{1+\epsilon^2}}{\epsilon} - \frac{1}{6} + \frac{2+5\epsilon^2}{12} \sqrt{1+\epsilon^2} \right]. \quad (23)$$

Очертание фронта кристаллизации у внутреннего угла (при $\alpha = 270^\circ$) определяется из условия $v = \epsilon$ с учетом выражений:

$$\epsilon = r^{2/3} \sin \frac{2}{3}\theta = \text{const}, \quad r = (X^2 + Y^2)^{1/2}, \quad \theta = \arctg \frac{Y}{X},$$

откуда следует

$$\epsilon(t) = (X^2 + Y^2)^{3/2} \sin \left(\frac{2}{3} \arctg \frac{Y}{X} \right).$$

При произвольных значениях угла α интеграл в решении (19) можно находить численными методами. На рис. 6 приведены результаты расчетов по формулам для углов, кратных $\frac{\pi}{4}$, т.е. при $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ и т.д. На рис. 7 результаты расчетов (сплошные линии) сопоставлены с опытными данными Б. Б. Гуляева [1], полученными в ходе экспериментов по выливанию жидкого остатка из отливок, образующих углы $\alpha = 90$ и 270° , в сопоставлении с затвердеванием плиты (сталь марки 35Л, температура заливки 1550°C , литейная форма выполнена из сырой песчано-глинистой смеси). Из рассмотрения данных на рис. 7 можно прийти к заключению, что полученные расчетом по формулам (21) и (23) графики динамики продвижения фронта кристаллизации стали вполне удовлетворительно согласуются с опытными данными.

Решения задачи для наиболее типичных конфигураций расчетной области

Схема расчетной области и контура охлаждающей части	Отображающая функция	Характерные размеры твердой корки	Функция $G(\xi) = \frac{2K\theta_{\Pi}}{2 + K\theta_{\Pi}}$
<p>Угол $\alpha = \pi/\rho$</p>	$\omega = u + iv = Z^{\rho}$ В частности: а) при $\alpha = \pi/2$ б) при $\alpha = \pi$ в) при $\alpha = 3/2\pi$	$\varepsilon = l\xi^{1/\rho}$ $\varepsilon = l\xi^{1/2}$ $\varepsilon = l\xi$ $\varepsilon = l\xi^{3/2}$	$\frac{1}{2\rho} \int_0^1 (u^2 + \xi^2)^{1/\rho} du - \frac{1}{2(P+2)}$ $\frac{1}{8} (\xi^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \xi^2}}{\xi} + \sqrt{1 + \xi^2} - 1)$ $\frac{1}{2} \xi$ $\frac{9}{8} \left[\frac{\xi^4}{4} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \xi^2}}{\xi} - \frac{1}{6} + \frac{2 + 5\xi^2}{12} (1 + \xi^2)^{1/2} \right]$
	$\omega = u + iv = \frac{2}{\pi} \arccos \bar{Z}$, где $\bar{Z} = X - iY$ В частности, при $l_2 = 0$	$\varepsilon_1 = l \left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \xi - \frac{l_1}{l} \right)$ $\varepsilon_2 = l \left(\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \xi - \frac{l_2}{l} \right)$ \gg	$\frac{1}{8} [(\pi \xi \operatorname{ch} \pi \xi - \pi \xi_0 \operatorname{ch} \pi \xi_0) - (\operatorname{ch} \pi \xi - \operatorname{ch} \pi \xi_0) - \pi \xi_0 (\operatorname{sh} \pi \xi - \operatorname{sh} \pi \xi_0)],$ где $\xi_0 = \frac{2}{\pi} \operatorname{arch} \frac{l_1}{l_2} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arsh} \frac{l_2}{l_1}$ $\frac{1}{8} [1 + \operatorname{ch} \pi \xi (\pi \xi - 1)]$
	$Z = X + iY = a_1 \cos \omega + a_3 \cos 3\omega + i(a_1 \sin \omega + a_3 \sin 3\omega)$, где $\omega = u + iv$; $a_1 = \frac{(a+b)}{2l}$; $a_2 = \frac{(a-b)}{2l}$	$\varepsilon_1 = l \left(\frac{a}{l} - a_1 e^{-\xi} - a_3 e^{-3\xi} \right)$ $\varepsilon_2 = l \left(\frac{b}{l} - a_1 e^{-\xi} - a_3 e^{-3\xi} \right)$	$\frac{1}{4} \left\{ a_1^2 [1 - (1 + 2\xi) e^{-2\xi}] + a_3^2 [1 - (1 + 6\xi) e^{-6\xi}] \right\}$
	$Z = X + iY = \sum_{k=0}^N a_k [\cos(2k+1)\omega \times \omega + i \sin(2k+1)\omega]$	$\frac{\varepsilon_1}{l} = 1 - (a_1 e^{-\xi} + a_5 e^{-5\xi} + a_9 e^{-9\xi} + \dots)$ $\frac{\varepsilon_2}{l} = a_1 (1 - e^{-\xi}) - a_5 \times (1 - e^{-5\xi}) + a_9 (1 - e^{-9\xi}) - \dots$	$\frac{1}{4} \left\{ a_1^2 [1 - (1 + 2\xi) e^{-2\xi}] + a_5^2 [1 - (1 + 10\xi) \times e^{-10\xi}] + a_9^2 [1 - (1 + 18\xi) e^{-18\xi}] + \dots \right\}$
	$\omega = u + iv = 2 \operatorname{arsh} Z$	$\varepsilon_1 = h \left(1 - \sin \frac{\xi}{2} \right)$ $\varepsilon_2 = h \operatorname{sh} \frac{u_0}{2} \cos \frac{\xi}{2}$	$\frac{1}{8} \left[1 + \cos \xi - (\pi - \xi) \sin \xi + \frac{\operatorname{sh} u_0}{2u_0} \times (\pi - \xi)^2 \right],$ где $u_0 = 2 \operatorname{arch}(1 + \delta)$, $\delta = \frac{l}{h}$

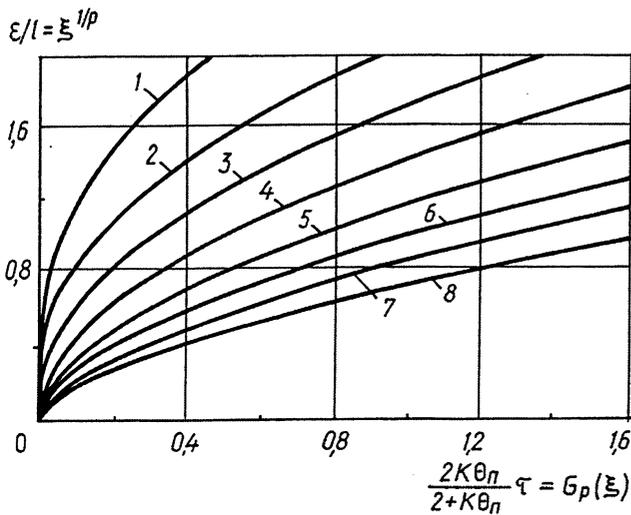


Рис. 6. Динамика продвижения твердой корки при затвердевании углов, кратных $\frac{\pi}{4}$

Используя в общем решении (16) различный вид отображающей функции, можно получить решение задачи о динамике продвижения фронта кристаллизации для различных видов расчетной области $ABCD$, определяемой, в свою очередь, конфигурацией литейной формы.

В таблице приведены решения задачи в виде функции $G(\epsilon)$, прямо пропорциональной текущему времени t , для наиболее типичных конфигураций расчетной области, а также виды соответствующих отображающих функций и аналитические выражения взаимосвязи характерных размеров твердой корки с параметром $\epsilon(\tau)$ отображающей функции.

Литература

1. Гуляев Б. Б. Литейные процессы. М.: Л. Машгиз, 1960.
2. Справочник литейщика (общие сведения по литью) / Под ред. Н. Н. Рубцова. М.: Машгиз, 1962.
3. Руссиян С. В., Баранов И. А. и др. Проектирование технологических процессов литейного производства. М.: Машгиз, 1951.
4. Вейник А. И. Тепловые основы теории литья. М.: Машгиз, 1953.
5. Вейник А. И. Теория затвердевания отливки. М.: Машгиз, 1960.
6. Гиршович Н. Г., Нехендзи Ю. А. Аналитическое решение задачи о затвердевании отливок разной конфигурации // Литейное производство 1956. № 3. С. 14–19; № 4. С. 13–17; № 6. С. 14–18; № 12. С. 13–18.
7. Lazaridis A. A numerical solution of the multidimensional solidification (or melting) problem // Intern. Journal Heat and Mass Transfer. 1970. Vol. 13, No. 9, P. 1459–1477.
8. Неуструев А. А. Принципы разработки САПР ТП литейного производства // Литейное производство. 1990. № 10. С. 2–3.
9. Неуструев А. А. Автоматизированное проектирование технологических процессов литья лопаток // Литые лопатки газотурбинных двигателей. М.: МИСИС. 2001. С. 263–292.
10. Вайсс К., Огородникова О. М., Попов А. В. Компьютерный инженерный анализ отливок в программе WINCAST // Литейное производство. 2002. № 7. С. 25–26.
11. Самойлович Ю. А. Расчет затвердевания отливок сложной формы с применением конформных отображений. ИФЖ. 1975. Т. 29, № 3. С. 527–533.

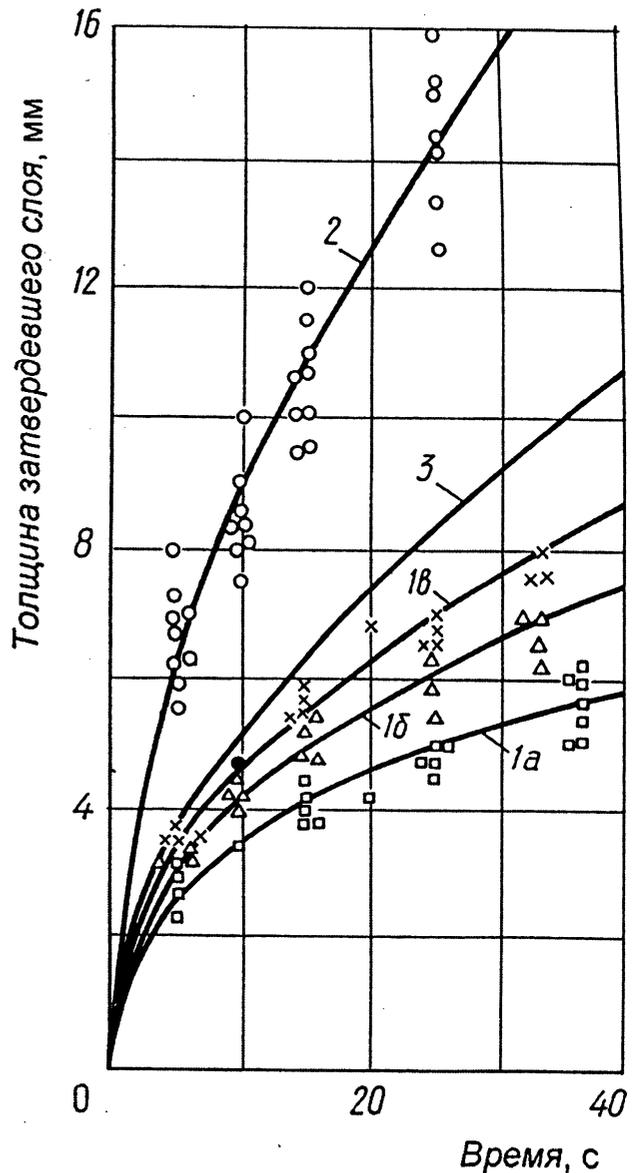


Рис. 7. Динамика продвижения твердой корки в стальных отливках для различных углов (точки) по данным Б. Б. Гуляева в сопоставлении с расчетными данными (сплошные линии): 1 – внутренний прямой угол ($\alpha = 270^\circ$) при радиусе закругления 3,5 мм (1а), 9 мм (1б) и 17 мм (1в); 2 – внешний прямой угол ($\alpha = 90^\circ$); 3 – плоская стенка

12. Самойлович Ю. А. Решение двумерной задачи Стефана в квазистационарном приближении // Теплофизика высоких температур. 1975. Т. 13, № 1. С. 127–133.
13. Тимошпольский В. И., Папкович В. Н., Мандель Н. Л. Применение конформных отображений для расчетов процессов затвердевания отливок квадратного сечения с закруглениями при граничных условиях III рода // Изв. вузов. Энергетика. 1992. № 5–6. С. 69–73.
14. Тимошпольский В. И., Пшоник М. Г. и др. Способ расчета режимов затвердевания непрерывнолитых заготовок // ИФЖ. 1998. Т. 71, № 4.
15. Самойлович Ю. А., Тимошпольский В. И., Трусова И. А., Филиппов В. В. Стальной слиток. В 3 т. Т. 2. Затвердевание и охлаждение / Под общ. ред. В. И. Тимошпольского, Ю. А. Самойловича. Мн.: Белорусская наука, 2000.
16. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958.
17. Лаврик В. И., Савенков В. Н. Справочник по конформным отображениям. Киев: Наукова думка, 1970.
18. Фильчаков В. П. Приближенные методы конформных отображений. Киев: Наукова думка, 1964.