



At using of method of equivalent sources there is received the decision for heating of prismatic ingot by ray. The comparison with the results of numerical solution of the problem and the existing exact methods has shown the satisfactory convergence of qualities.

Ю. С. ПОСТОЛЬНИК, О. А. ЧОРНЫЙ, ДГТУ,
В. И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ, А. В. ДЕМИН, БНТУ

УДК 536.24

К РАСЧЕТУ ТЕМПЕРАТУРНОГО СОСТОЯНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СЛИТКА В УСЛОВИЯХ ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Объекты призматической формы, участвующие в тепловых процессах, находят довольно широкое распространение в технике, и прежде всего в металлургии (крупные бьюминговые или слябовые слитки металла при нагреве или охлаждении, ножи горячей резки металла, колосники некоторых печей). В связи с этим разработка методик расчета их температурного состояния является актуальным вопросом.

В случае термомассивного тела его температурное поле определяется решением соответствующей краевой задачи теплопроводности. И если эта задача линейная, то ее точное решение получается известными методами математической физики. Если математическая модель содержит те или иные нелинейности (функциональная зависимость коэффициентов теплопереноса, нелинейность условий теплообмена с окружающей средой), то необходимые результаты могут быть получены с помощью лишь приближенных (численных, аналоговых или аналитических) методов.

Исследование процессов высокотемпературного нагрева крупных призматических слитков, нагреваемых лучистым потоком, встречает известные математические трудности. Такие задачи в научных исследованиях чаще всего решаются численно и заканчиваются в лучшем случае набором графиков или таблиц, практическое использование которых ограничено диапазоном варьирования исходных параметров. И если такая форма решения может быть более-менее удовлетворительной при расчетах температурного состояния призмы, то для исследования ее термонапряженного состояния она практически неприемлема из-за дискретности задания температурного поля.

Несмотря на развитие численных методов решения нелинейных задач теплопроводности, приближенные аналитические методы [1–3], особенно для решения многомерных задач, по-прежнему имеют большую практическую значимость. Среди немногочисленных решений многомерных задач

нагрева наиболее известны методы Иванова–Видина [7, 8], основная суть которых состоит в линеаризации граничных условий, соответствующих закону Стефана–Больцмана. После таких преобразований и еще некоторых упрощений решение линеаризованной задачи осуществляется точными методами. Но эти «точные» решения довольно сложны и громоздки для эффективного их использования даже при расчетах температурного поля призмы. Для исследования же термонапряженного состояния они в принципе непригодны, так как не дают в явном виде координатную зависимость температурного поля.

В этом плане очевидную практическую ценность приобретают те аналитические методы, которые позволяют напрямую получить достаточно простые решения приемлемой инженерной точности. К таким методам относится, например, метод эквивалентных источников (МЭИ) [4], хорошо зарекомендовавший себя для решения линейных и нелинейных краевых задач теплопроводности [6, 9, 10], в том числе и многомерных (например, [11]).

Рассмотрим следующую двумерную ($2H_1 \times 2H_2$) нелинейную краевую задачу теплопроводности неограниченной призмы:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi_1^2} + k^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi_2^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad \theta(0, \xi_2, 0) = \theta_0 = \text{const}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi_i=1} = \text{Sk} [1 - \theta^4(\xi_1, \xi_2, \tau)]_{\xi_i=1}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi_i=0} = 0, \quad (2)$$

где введены безразмерные величины

$$\theta(\xi_1, \xi_2, \tau) = \frac{T(\xi_1, \xi_2, \tau)}{T_c}; \quad \xi_i = \frac{x_i}{H_i}; \quad k = \frac{H_1}{H_2} \leq 1; \quad (3)$$

$$\tau = at / H_1^2; \quad \text{Sk}_i = \sigma_b T_c^3 H_i / \lambda \quad (i=1, 2).$$

Допустим, что известен тепловой поток $q_{\text{пл}}(t)$ в центральных точках боковых поверхностей призмы (например, из экспериментальных данных). В

таким случае в (1), (2) нелинейное граничное условие III рода (2) можно заменить граничным условием II рода

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi_i=1} = Ki_i(\tau) [1 - p(\tau) \xi_i^2], \quad (j \neq i=1, 2), \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi_i=0} = 0, \quad (4)$$

где

$$Ki_i(\tau) = \frac{q_{in}(\tau) H_i}{\lambda \tau_c}. \quad (5)$$

Таким образом, исследование температурного состояния призмы в условиях нагрева излучением будем строить на решении вспомогательной задачи (1), (4).

В соответствии с основной идеей МЭИ примем разрешающее уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi_1^2} + f_2(\xi_2, \tau) = f_1(\tau), \quad (6)$$

где введены «эквивалентные источники»

$$f_1(\tau) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{d}{d\tau} \int_0^1 \int_0^1 \theta_1(\xi_1, \xi_2, \tau) d\xi_1 d\xi_2; \quad (7)$$

$$f_2(\xi_2, \tau) = k_2 \int_0^1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi_2^2} d\xi_1. \quad (8)$$

Интегрируя уравнение (6) дважды по ξ_1 и используя граничные условия (4), находим

$$f_2(\xi_2, \tau) = f_1(\tau) - Ki(\tau) [1 - p(\tau) \xi_2^2], \quad (9)$$

$$\theta_1(\xi_1, \xi_2, \tau) = B_1(\xi_2, \tau) + Ki(\tau) [1 - p(\tau) \xi_2^2] \xi_1^2 / 2. \quad (10)$$

Подставляя выражения (9), (10) в интегральное условие (8), приходим к дифференциальному уравнению, решая которое при условиях однозначности, соответствующих граничному условию (4), получаем

$$\frac{\partial B_1}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=1} = Ki(\tau), \quad \frac{\partial B_1}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=0} = 0, \quad (11)$$

В конечном итоге имеем

$$\theta_1(\xi_1, \xi_2, \tau) = \theta_u(\tau) + \frac{Ki(\tau)}{2} \left\{ \left[1 - \frac{p(\tau)}{3k^2} \right] \xi_2^2 + [1 - p(\tau) \xi_2^2] \xi_1^2 + \frac{p(\tau)}{6k^2} \xi_2^4 \right\}, \quad (12)$$

$$f_1(\tau) = (1 + k^2) Ki(\tau) [1 + p(\tau)/3]. \quad (13)$$

Анализ функции (12) показывает, что она не адекватно описывает изменение температурного поля вдоль координатных осей $0\xi_1$ и $0\xi_2$. Например, определение температуры в средних точках $M_1(\xi_1 = 1, \xi_2 = 0)$ и $M_2(\xi_1 = 0, \xi_2 = 1)$ граней квадратной ($k = 1$) призмы по решению (12) дает различные результаты

$$\theta_{M_1}(\tau) = \theta_u(\tau) + \frac{Ki(\tau)}{2}, \quad \theta_{M_2}(\tau) = \theta_u(\tau) + \frac{Ki(\tau)}{2} [1 - \frac{p(\tau)}{6}], \quad (14)$$

тогда как они должны быть одинаковы.

Для устранения этого противоречия и одновременно повышения точности решения примем

теперь за главное направление ось $0\xi_2$ с соответствующим разрешающим уравнением МЭИ в виде

$$k^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi_2^2} + f_2'(\xi_1, \tau) = f_1(\tau), \quad (15)$$

где

$$f_2'(\xi_1, \tau) = \int_0^1 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi_1^2} d\xi_2. \quad (16)$$

Повторив аналогичные предыдущим математические выкладки, получим решение

$$\theta_2(\xi_1, \xi_2, \tau) = \theta_u(\tau) + \frac{Ki(\tau)}{2} \left\{ \left[1 - \frac{k^2 p(\tau)}{3} \right] \xi_1^2 + [1 - p(\tau) \xi_1^2] \xi_2^2 + \frac{k^2 p(\tau)}{6} \xi_1^4 \right\}, \quad (17)$$

которое также «страдает» координатным несогласованием, подобным (14).

Поэтому за окончательное примем решение в виде среднеарифметической функции выражений (12) и (17):

$$\begin{aligned} \theta(\xi_1, \xi_2, \tau) &= [\theta_1(\xi_1, \xi_2, \tau) + \theta_2(\xi_1, \xi_2, \tau)] / 2 = \\ &= \theta_u(\tau) + \frac{Ki(\tau)}{2} \left\{ \left[1 - \frac{p(\tau)}{6} k^2 \right] \xi_1^2 + \left[1 - \frac{p(\tau)}{6k^2} \right] \xi_2^2 - p(\tau) \xi_1^2 \xi_2^2 + \frac{p(\tau)}{12k^2} (\xi_1^4 + k^4 \xi_2^4) \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Оставшуюся неизвестную функцию $\theta_u(\tau)$ температурного центра определяем интегральным условием (7), в которое подставляем выражения $f_1(\tau)$ из (13) и $\theta(\xi_1, \xi_2, \tau)$ из (18). С учетом начального условия $\theta(0, 0, 0) = \theta_u(0) = \theta_0$ находим

$$\begin{aligned} \theta_u(\tau) &= \theta_0 + (1 + k^2) \int_0^\tau Ki(\tau) \left[1 - \frac{p(\tau)}{3} \right] d\tau - \frac{Ki(\tau) - Ki(0)}{3} + \\ &+ \left[1 + \frac{7(1 + k^4)}{20k^2} \right] \frac{Ki(\tau)p(\tau) - Ki(0)p(0)}{18}. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, вспомогательная задача (1), (4) получила окончательное решение (18), (19). Используем это решение для исследования температурного состояния призмы при лучистом нагреве. В работах [4, 6, 10] приведено высокоточное решение нелинейной задачи теплопроводности неограниченной пластины в условиях теплового излучения, согласно которому температура поверхности $\bar{\theta}_n(\tau)$ определяется выражением:

$$[\varphi(\bar{\theta}_n) - \varphi(\bar{\theta}_n^0)] + \frac{Sk}{3} [\varphi(\bar{\theta}_n) - \varphi(\bar{\theta}_n^0)] = Sk \tau, \quad (20)$$

где

$$\varphi(\bar{\theta}_n) = \frac{1}{2} [\text{arth } \bar{\theta}_n(\tau) + \text{arctg } \bar{\theta}_n(\tau)]; \quad (21)$$

$$\varphi(\bar{\theta}_n) = -\ln[1 - \bar{\theta}_n^4(\tau)]. \quad (22)$$

Здесь, как и в решении (18), (19), отсчет времени τ ведется с момента окончания инерционного этапа прогрева. При этом соответствующая этому моменту температурная функция поверхности $\bar{\theta}_n^0$ детерминирована алгебраическим уравнением [4]:

$$(\bar{\theta}_n^0)^4 + a_1 \bar{\theta}_n^0 = a_0, \quad a_1 = 2/Sk, \quad a_0 = 1 + a_1 \theta_0 \quad (23)$$

с известным решением

$$\left. \begin{aligned} \bar{\theta}_n^0 &= (\sqrt{2a_1/b - b^2} - b)/2, \quad b = \sqrt{u+v}, \\ u &= \sqrt{\frac{a_1^2}{2} \pm \sqrt{D}}, \quad D = \left(\frac{4a_0}{3}\right)^3 + \left(\frac{a_1^2}{2}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Полагая, что температуры центральных точек поверхностей (граней) призмы (ввиду осевой симметрии) изменяются во времени по закону, близкому к трансцендентному уравнению (20), а по периметру — в соответствии с граничным условием (2), можем принять

$$Ki(\tau) = 8k[1 - \bar{\theta}_n^4(\tau)]. \quad (25)$$

Относительно нестационарного параметра $p(\tau)$, характеризующего в соответствии с принятым условием (4) неоднородность теплового потока по периметру слитка, нужно учитывать следующее. Во-первых, на ребрах призмы ($\xi_1 = \xi_2 = 1$), где температура максимальная, тепловой поток должен быть меньшим, чем на средние грани. Во-вторых, в начале ($\tau = 0$) и в конце ($\tau \rightarrow \infty$) нагрева температурное поле однородное. Следовательно, $p_{\max} < 1$, $p(0) = p(\infty) = 0$.

Напомним, что входящие в функцию (10) значения $p(0)$ и $Sk(0)$ относятся к концу начального этапа прогрева. Их можно определить, например, полагая $k = 1$, $\tau = 0$, $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$ из решения (18):

$$\bar{\theta}_n^0 = \theta_0 + \frac{Ki(0)}{2}[1 - p(0)/12],$$

откуда находим

$$p(0) = 12 \frac{Ki(0) - 2(\bar{\theta}_n^0 - \theta_0)}{Ki(0)}$$

или с учетом (25)

$$p(0) = 12 \left[1 - 2 \frac{\bar{\theta}_n^0 - \theta_0}{Sk(1 - \bar{\theta}_n^0)^4} \right].$$

Таким образом, получено решение, полностью определяющее температурное поле призмы. Проведенные на численном примере расчеты (рис. 1, 2) по предложенному решению и численному интегрированию [1] дали расхождение в пределах 3–5 %.

Итак, путем приближенного аналитического решения поставленной краевой задачи теплопро-

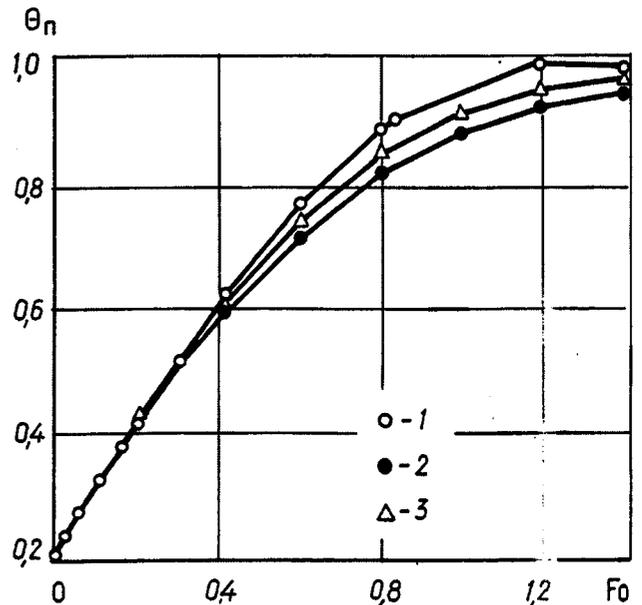


Рис. 1. Температура центра боковых поверхностей квадратной призмы в зависимости от времени: 1 — МЭИ; 2 — метод Иванова-Видина; 3 — численный метод

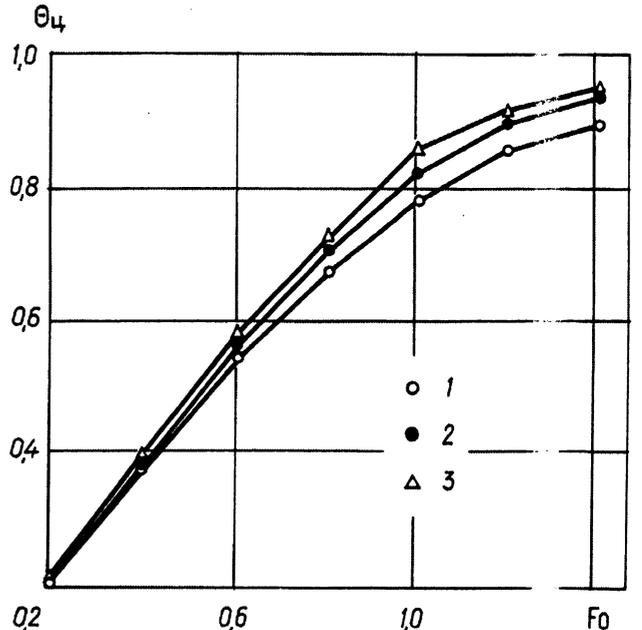


Рис. 2. Температура центра квадратной призмы в зависимости от времени: 1 — численный метод; 2 — метод Иванова-Видина; 3 — МЭИ

водности с нелинейным граничным условием при помощи МЭИ получена функция, определяющая в явном виде координатную зависимость температурного поля призмы. Это дает возможность использовать известные методы плоской задачи термомеханики для исследования термонапряженного состояния соответствующих объектов призматической формы.

Литература

1. Лыков А. В. Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1970. № 5. С. 109–150.
2. Коздоба Л. А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М.: Наука, 1975.

3. Беляев Н. М., Рядно А. А. Методы теории теплопроводности. М.: Высш. шк., 1982. Ч. 1, 2.
 4. Постольник Ю. С. Приближенные методы исследований в термомеханике. Киев—Донецк: Вища школа: Головное изд-во, 1984.
 5. Прикладные задачи металлургической теплофизики / В. И. Тимошпольский, Н. М. Беляев, А. А. Рядно и др. Мн.: Наука і тэхніка, 1991.
 6. Постольник Ю. С., Огурцов А. П. Нелінійна прикладна термомеханика. Київ: УМЦ ВО МОНУ, 2000.
 7. Иванов В. В., Видин Ю. В., Колесник В. А. Процессы прогрева многослойных тел лучисто-конвектив-

ним теплом. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. ун-та, 1990.
 8. Видин Ю. В. Инженерные методы теплопроводности. Красноярск: Изд-во Красноярск. ун-та, 1992.
 9. Тимошпольский В. И., Трусова А. А., Пекарский М. Я. Кольцевые печи. Мн.: Высш. шк., 1993.
 10. Постольник Ю. С., Огурцов А. П. Металургійна термомеханіка. Дніпропетровськ: Системні технології, 2002.
 11. Постольник Ю. С., Фролова Л. В. Исследование теплового режима работы кессона конвертора // Изв. вузов. Черная металлургия. 1979. № 10. С. 84—87.

С Юбилеем,

**Олег Егорович
Жданович!**

(К 60-летию со дня рождения)

18 октября 2002 г. исполнилось 60 лет техническому директору-главному инженеру производственного Республиканского унитарного предприятия «Минский моторный завод» Олегу Егоровичу Ждановичу.

Олег Егорович начал свою трудовую деятельность с августа 1963 г. на Минском моторном заводе в качестве фрезеровщика после окончания Витебского станкостроитель-

ного техникума. Все последующие годы посвятил Минскому моторному заводу, работая мастером, инженером-технологом, начальником цеха, начальником отдела, зам. главного инженера, главным инженером, а в настоящее время техническим директором-главным инженером.

О. Е. Жданович возглавляет и принимает непосредственное практическое участие в работах по созданию и освоению производства новых моделей и модификаций дизельных двигателей для тракторов, автомобилей, комбайнов, автобусов и другой сельскохозяйственной, дорожно-строительной и специальной техники, отвечающих современным международным стандартам и требованиям конкретных потребителей, а также по повышению качества, надежности и конкурентоспособности выпускаемой продукции, проводит большую работу по снижению издержек производства и его технического перевооружения. Он является автором 66 рацпредложений и 8 изобретений. Личный вклад в экономический эффект от внедрения 30 рационализаторских предложений составил 250 тыс. у. е.

О. Е. Жданович неоднократно признавался лучшим рационализатором предприятия, а в 2002 г. «Лучшим рационализатором Минской области». Награжден юбилейной медалью «За доблестный труд» (1970 г.) и медалью «За трудовую доблесть» (1981 г.).

О. Е. Жданович принципиален в решении стоящих задач, обладает чувством ответственности за порученное дело, умеет анализировать проблемные ситуации, пользуется уважением в коллективе предприятия.

Искренне поздравляем Олега Егоровича с юбилеем и от всей души желаем ему крепкого здоровья, долгих лет жизни, больших творческих успехов и счастья в личной жизни.

*Совет БелОлиМ
Редколлегия*