



*A mathematical model of thermal solid plate heating in conditions of theoretical counterflow is worked out. The analysis is given of heating dynamics at various values of ratio of water equivalents of metal and gas.*

В. И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ, БГПА,  
Ю.С. ПОСТОЛЬНИК, Днепродзержинский государственный технический университет,  
С. М. КОЗЛОВ, И. А. ТРУСОВА, П. Э. РАТНИКОВ, БГПА

## РАСЧЕТ НАГРЕВА ТЕРМОМАССИВНОЙ ПЛАСТИНЫ В УСЛОВИЯХ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ПРОТИВОТОКА

УДК 669.046

Противоточный нагрев металла широко используется в печах металлургического и машиностроительного производства. Однако значительное число научных исследований, посвященных математическому моделированию тепловых процессов, происходящих при нагреве металла, базируется на заданном температурном режиме работы печи и различного рода упрощениях.

В данной работе предлагается расчетная схема для численного решения задачи противоточного теплообмена при нагреве термически массивной пластины, что позволяет избавиться от некоторых трудностей аналитического решения, а также избежать отдельных упрощений и повысить точность инженерных расчетов. Запись математической модели в объединенной постановке (использование коэффициента формы тела) дает возможность расширить область ее применения для моделирования нагрева тел различной геометрии.

Предположим следующее: газовый поток состоит из продуктов полного сгорания топлива, распределение поля скоростей и температур в поперечном сечении газового потока равномерное, водяные эквиваленты газов и материала  $W_r$ ,  $W_m$  не изменяются по всей длине зоны теплообмена, потери в окружающую среду отсутствуют, нагрев пластины симметричный.

Учитывая отмеченное, математическую модель нагрева термически массивной пластины в условиях теоретического противотока запишем в следующей безразмерной постановке:

$$\frac{\partial^2 \theta(Fo, \xi)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \theta(Fo, \xi)}{\partial Fo}, \quad (1)$$

$$0 \leq Fo \leq Fo_k, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad \theta(0, \xi) = \theta = 0,$$

$$\frac{\partial \theta(Fo, 1)}{\partial \xi} = Bi(\theta_r(Fo) - \theta(Fo, 1)), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta(Fo, 0)}{\partial \xi} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d\theta_r}{dFo} = (Bi(\theta_r(Fo) - \theta(Fo, 1)))n,$$

$$\theta_r(0) = \theta_r'' = 1,$$

$$\text{где } \theta(Fo, \xi) = \frac{T - T''}{T_r'' - T''}, \quad \theta_r(Fo) = \frac{T_r - T''}{T_r'' - T''} -$$

соответственно безразмерные температуры металла в точке  $\xi$  сечения заготовки и печи в момент времени  $Fo$ ;  $Fo_k$  — продолжительность нагрева;

$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$  — критерий Био;  $n = \frac{FRc_p}{V_r c_r}$  — отношение водяных эквивалентов металла и газов;  $T$ ,  $T_r$  — температуры заготовки и газа;  $T''$ ,  $T_r''$ ,  $T'''$  — температуры газа на входе и выходе;  $R$  — полутолщина пластины;  $t$  — время;  $\lambda$ ,  $c$  — коэффициенты теплопроводности и теплоемкости металла;  $\alpha$  — коэффициент теплообмена конвекцией;  $F$  — поверхность обогрева;  $\rho$  — плотность металла;  $V_r$ ,  $c_r$  — объем и теплоемкость газа.

Дифференциальное уравнение (1) решали методом сеток. Разбивая половину поперечного сечения пластины на  $N$  слоев одинаковой толщины  $\Delta \xi = 1/N$ , заменяя непрерывное течение времени дискретным с шагом  $\Delta Fo = Fo_k/M$  ( $M$  — количество интервалов дискретизации), выполняя преобразование частных производных конечными разностями

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = \frac{\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{\Delta \xi^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j}}{\Delta Fo},$$

имеем следующую расчетную схему:

$$\theta_{i,j+1} = \theta_{i,j} + \Delta Fo \frac{\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{\Delta \xi^2}, \quad (4)$$

$$i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, M-1.$$

Для центрального слоя выражение (4) с учетом краевого условия (3) принимает вид

$$\theta_{0,j+1} = \theta_{0,j} + \Delta Fo \frac{\theta_{1,j} - \theta_{0,j}}{\Delta \xi^2}, \quad j = 0, \dots, M-1.$$

Температуру поверхностного слоя находили с учетом (2) по методу последовательных приближений Ньютона:

$$\theta_{N,j+1}^{(l+1)} = \theta_{N,j+1}^{(l)} - \frac{(\theta_{N,j+1}^{(l)} - \theta_{N-1,j+1}^{(l)}) / \Delta \xi - \text{Bi}(\theta_r - \theta_{N,j+1}^{(l)})}{1 / \Delta \xi + \text{Bi}}$$

В качестве начального приближения использовали температуру поверхности в начале временного интервала  $\theta_{N,j+1}^{(0)} = \theta_{N,j}$ .

В начальный момент времени  $\theta_{i,0} = 0$ ,  $i=0, \dots, N$ .

Расчетная схема для определения температуры печи имеет вид

$$\theta_{r,j} = \theta_{r,j} + \Delta \text{Fo} (\text{Bi}(\theta_{r,j} - \theta_{N,j})) n, \\ j = 0, \dots, M-1, \quad \theta_{r,0} = 1.$$

С целью проверки адекватности разработанной математической модели осуществлен расчет процессов нагрева симметричной пластины при различных исходных данных. Для численной оценки точности полученных решений были использованы данные работы [1].

Изменения температур металла на поверхности заготовки и в ее геометрическом центре, а также динамика температуры печи для соответствующих вариантов расчетов представлены на рис. 1, 2. Относительные отклонения расчетных температур от тестовых колеблются от 0,4 до 1% в первом эксперименте и от 0,1 до 3% во втором эксперименте, что можно считать вполне приемлемым результатом.

Анализ результатов численного эксперимента подтверждают отмеченные в работах [1, 2] данные: величина  $n$  определяет характер протекания теплового процесса.

При  $n < 1$  с увеличением времени процесс нагрева пластины сходящийся: все температурные функции при  $\text{Fo} \rightarrow \infty$  достигают предела, равного

$$\theta_{\infty} = \theta_r^0 (1 + 2n[1 + \text{Bi}/3] / [(2 + \text{Bi})(1 - n)]).$$

При  $n > 1$  — процесс расходящийся. В случае  $n = 1$  происходит линейный рост значений температурных функций. При этом сохраняется практически постоянный температурный перепад ( $\approx 0,4$ ) между поверхностью и центром, установившийся в конце инерционного периода нагрева. Результаты расчетов приведены на рис. 3.

Предложенную расчетную схему можно использовать для вычисления продолжительности нагрева металла в печах с противоточным теплообменом, расчета температурного поля по сечению нагреваемого образца в любой момент времени нагрева, определения динамики температуры греющей среды в зависимости от величины расхода топлива и производительности печи и т. д.

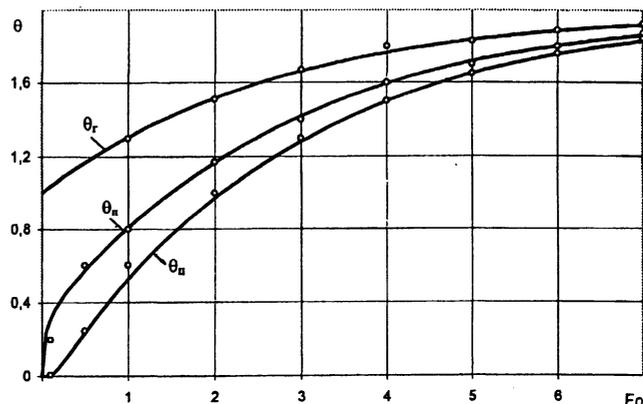


Рис. 1. Изменение температур печи и пластины, нагреваемой в условиях противотока ( $\theta_r$  — температура печи;  $\theta_n$  — температура поверхности;  $\theta_u$  — температура центра; точки — данные работы [1]) при  $\text{Bi}=1$ ,  $n=0,5$

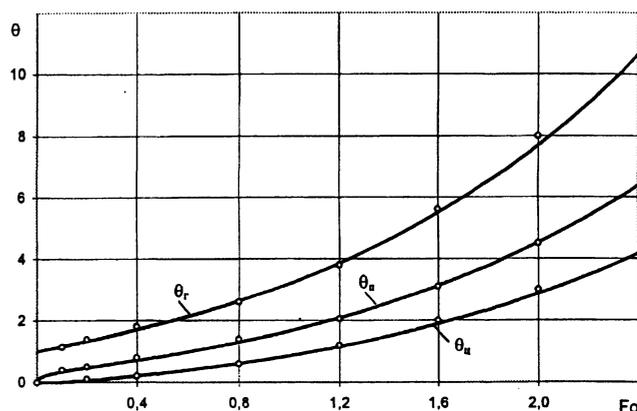


Рис. 2. Изменение температур печи и пластины, нагреваемой в условиях противотока при  $\text{Bi}=1$ ,  $n=2$ . Обозначения те же, что на рис. 1

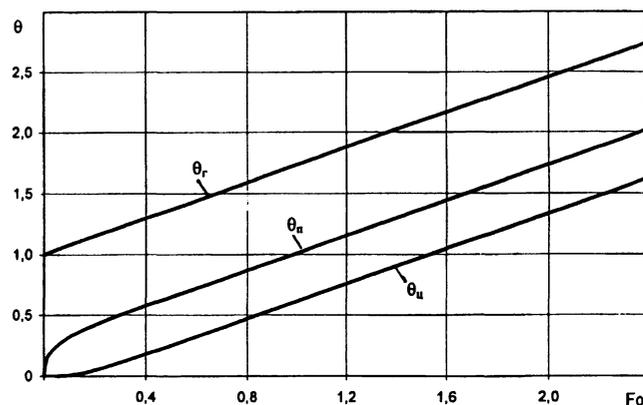


Рис. 3. Изменение температур печи и пластины, нагреваемой в условиях противотока при  $\text{Bi}=1$ ,  $n=1$ . Обозначения те же, что на рис. 1

## Литература

1. Гольдфарб Э. М. Теплотехника металлургических процессов. М.: Металлургия, 1967.
2. Постольник Ю. С. К расчету температур и времени нагрева массивных тел при противоточном теплообмене // Изв. вузов. Черная металлургия. 1990. № 6.